

Диэлектрики, задачи с планом решения

1. Протяжённая диэлектрическая пластина толщиной h (диэлектрическая проницаемость ε) помещена в однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$, так что нормаль к пластине составляет угол θ ($\theta < \frac{\pi}{4}$) с направлением поля. Чему равен модуль вектора поляризации $\mathbf{P}$, величина индукции $\mathbf{D}$ и напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ внутри пластины? Определите поверхностную плотность поляризационных зарядов. Как направлены векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ внутри пластины?

- Предположим, что поляризация пластины однородна. Поле вне пластины можно представить как суперпозицию внешнего поля $\mathbf{E}_0$ и поля зарядов пластины. Объясните, почему поле вне пластины остаётся равным $\mathbf{E}_0$ (т. е. пластина не искажает внешнее поле).
- Разложите вектор $\mathbf{E}_0$ на нормальную E_{0n} (перпендикулярную пластине) и тангенциальную $E_{0\tau}$ (параллельную пластине) компоненты. Определите нормальную и тангенциальную компоненты вектора электрической индукции вне пластины: D_{0n} и $D_{0\tau}$.
- Используйте граничные условия для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$. Определите D_n и E_τ внутри пластины.
- Внутри диэлектрика $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$. Используя это соотношение, выразите E_n внутри пластины через E_0 , θ и ε . Определите также D_τ .
- Найдите модуль вектора $\mathbf{E}$ внутри пластины, зная E_τ и E_n . Аналогично найдите модуль D .
- Вектор поляризации определяется как $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) \mathbf{E}$. Найдите модуль P .
- Поверхностная плотность поляризационных зарядов равна $\sigma_{\text{пол}} = P_n$, где P_n — проекция $\mathbf{P}$ на внешнюю нормаль к грани пластины. Вычислите $\sigma_{\text{пол}}$ на каждой из двух граней.
- Сонаправлен ли вектор $\mathbf{E}$ внутри пластины вектору $\mathbf{E}_0$? Сонаправлены ли $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ с $\mathbf{E}$ внутри пластины? Как изменилось направление поля при входе в пластину и почему? Изобразите схематично картину линий напряжённости внутри и вне пластины.

2. Рассмотрим протяжённую пластину с «замороженной» поляризацией. Пусть вектор поляризации $\mathbf{P}$ направлен перпендикулярно поверхностям пластины. Определите векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ внутри и вне пластины. Как изменится ответ, если нормаль к поверхности пластины составляет угол θ ($\theta < \frac{\pi}{4}$) с вектором $\mathbf{P}$?

- Рассмотрите сначала случай $\mathbf{P} \perp$ пластине. Чему равны $\sigma_{\text{пол}}$ на верхней и нижней гранях?
- Какое электрическое поле создаёт бесконечная пластина с поверхностными зарядами $+\sigma_{\text{пол}}$ и $-\sigma_{\text{пол}}$ на гранях? Чему равно поле внутри и вне пластины? Выразите $\mathbf{E}$ через $\mathbf{P}$.
- Есть ли в этой задаче свободные заряды? Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{своб}}$, определите, чему равна D вне пластины. Найдите D внутри, используя граничное условие для нормальной компоненты D_n .

- Проверьте ответ: убедитесь, что внутри пластины выполняется соотношение $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$.
- Теперь перейдите к общему случаю: нормаль $\mathbf{n}$ к пластине составляет угол θ с вектором $\mathbf{P}$. Разложите $\mathbf{P}$ на нормальную P_n и тангенциальную P_τ компоненты относительно пластины. Чему равна $\sigma_{\text{пол}}$ на гранях теперь?
- Поле связанных зарядов направлено по нормали к пластине. Чему равно $\mathbf{E}$ внутри и вне пластины? (Учтите, что тангенциальная компонента $\mathbf{P}$ не создаёт поверхностных зарядов.)
- Найдите $\mathbf{D}$ внутри и вне пластины. Сонаправлены ли $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ внутри пластины?

3. Чему равна напряжённость поля внутри шара с «замороженным» вектором поляризации $\mathbf{P}$? Опишите качественно характер изменения поля снаружи шара.

- Однородно поляризованный шар можно представить как два шара с равными и противоположными объёмными плотностями заряда $\pm \rho$, смещённых друг относительно друга на малый вектор $\mathbf{d}$. Выразите $\mathbf{P}$ через ρ и $\mathbf{d}$.
- Чему равно электрическое поле внутри однородно заряженного шара? Выразите его через объёмную плотность заряда ρ и радиус-вектор $\mathbf{r}$ от центра шара.
- Суперпозиция полей двух шаров с зарядами $+\rho$ и $-\rho$, сдвинутых на $\mathbf{d}$, даёт результирующее поле внутри. Покажите, что оно однородно, и выразите $\mathbf{E}$ через $\mathbf{P}$.
- Каково поле однородно заряженного шара вне шара? Докажите, что поле двух смещённых шаров вне области их перекрытия эквивалентно полю диполя. Выразите дипольный момент этого диполя через $\mathbf{P}$.

4. Чему равна поляризуемость маленького металлического шарика радиусом r ? Чему равна диэлектрическая проницаемость разреженного газа таких маленьких металлических шариков, если их концентрация равна n при этом $nr^3 \ll 1$?

5. В предыдущей задаче при вычислении диэлектрической проницаемости предполагалось, что поле, действующее на каждый шарик, совпадает с внешним полем $\mathbf{E}$. В плотных средах это приближение перестаёт работать: каждая молекула «чувствует» не только внешнее поле, но и поле окружающих её поляризованных молекул. Локальное поле $\mathbf{E}_{\text{лок}}$, непосредственно действующее на молекулу, есть сумма этих двух вкладов.

Считая локальное поле равным полю внутри воображаемой сферической полости, вырезанной в равномерно поляризованной среде с поляризацией $\mathbf{P}$, покажите, что учёт взаимодействия между молекулами приводит к формуле Клаузиуса–Мосотти:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3}.$$

- Пусть $\mathbf{E}$ — макроскопическое поле внутри диэлектрика (не путать с внешним полем, в которое диэлектрик помещён). Локальное поле $\mathbf{E}_{\text{лок}}$ в точке, где находится молекула, равно $\mathbf{E}$ минус поле шара, который заполнял бы сферическую полость вокруг этой молекулы.
- Выразите $\mathbf{E}_{\text{лок}}$ через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$.

- Дипольный момент молекулы равен $\mathbf{p} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{лок}}$, а вектор поляризации — $\mathbf{P} = n\mathbf{p}$, где n — концентрация молекул. Выразите $\mathbf{P}$ через α , n и $\mathbf{E}_{\text{лок}}$, а затем подставьте найденное выражение для $\mathbf{E}_{\text{лок}}$. Какое уравнение связывает $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$?
- Воспользуйтесь соотношением $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}$, чтобы исключить оба вектора и получить формулу Клаузиуса–Мосотти.