

Диэлектрики

Векторы индукции и поляризации

Для описания электрического поля в материальной среде вводятся векторы $\vec{D}$ и $\vec{P}$, удовлетворяющие соотношению (в системе СИ)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

где $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$ — вектор поляризации, равный дипольному моменту единицы объёма диэлектрика; $\vec{D}$ — вектор электрической индукции, характеризующий поле свободных зарядов, и удовлетворяющий теореме Гаусса в интегральной или дифференциальной форме

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho_{\text{своб}} dV, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{своб}}.$$

В линейных средах при не очень больших значениях напряжённости поля справедливы соотношения

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{P} = (\epsilon - 1) \epsilon_0 \vec{E},$$

где постоянная ϵ — диэлектрическая проницаемость среды.

1. В бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ находится точечный заряд q . Найдите электрическую индукцию D , напряжённость поля E и его потенциал φ , а также поляризованность P в точке на расстоянии r от заряда. С какой силой взаимодействуют точечные заряды q и Q , расположенные на расстоянии l друг от друга в этой среде?

2. Две тонкие параллельные пластины, расположенные на небольшом (по сравнению с размерами пластин) расстоянии $2h$ друг от друга, заряжены одинаково с поверхностной плотностью σ_1 и σ_2 ($\sigma_2 > \sigma_1$). Между пластинами помещают диэлектрическую плоскопараллельную пластинку толщиной $d = h$ с проницаемостью ϵ . Найдите разность потенциалов V между пластинами. Чему равна поверхностная плотность положительного и отрицательного поляризационных зарядов, возникающих на разных сторонах пластинки? Краевыми эффектами можно пренебречь.

3. Внутри плоского конденсатора, обкладки которого соединены проводником, помещена плоскопараллельная пластина толщиной h из диэлектрика с «замороженной поляризацией» P . Вектор поляризации ортогонален боковым граням пластины и обкладкам конденсатора. Пренебрегая зависимостью поляризованности диэлектрика от электрического поля, определите напряжённость и индукцию электрического поля между обкладками конденсатора внутри и вне пластины, если расстояние между обкладками равно d .

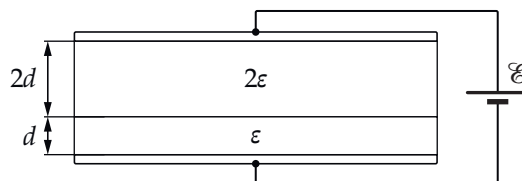
4. Убедитесь в том, что поверхностная плотность поляризационного заряда в задачах 2 и 3 удовлетворяет соотношению

$$\sigma_{\text{пол}} = P_n,$$

справедливому на границе раздела диэлектрика и вакуума (P_n — нормальная составляющая вектора поляризации).

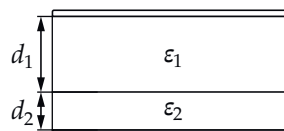
5. Почему для пластины с «замороженной поляризацией» (из задачи 3) понятие диэлектрической проницаемости лишено смысла?

6. Между обкладками плоского конденсатора (см. рисунок) находятся две диэлектрические пластины: одна толщиной $d = 0,885$ мкм из материала с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 10$, другая толщиной $2d = 1,77$ мкм из материала с проницаемостью $2\epsilon = 20$. Конденсатор подключен к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 48$ В. Размеры обкладок конденсатора значительно больше расстояния между ними. Найдите поверхностную плотность свободных зарядов на верхней обкладке конденсатора. Чему равна суммарная поверхностная плотность поляризационных зарядов на границе раздела диэлектриков?

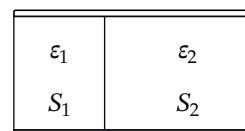


7. Решите задачи 3.7 ($l \gg r$) и 3.8 (вспомните формулу $dE_{\perp} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$) из задачника под ред. Овчинкина [1].

8. Найдите ёмкость плоского конденсатора (см. рисунок), между обкладками которого располагаются две диэлектрические пластины: одна толщиной d_1 из материала с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , а другая толщиной d_2 из материала с проницаемостью ϵ_2 , если ёмкость конденсатора без пластин равна C_0 . Изменится ли искомая ёмкость, если на границе раздела диэлектриков будет размещена тонкая плоская проводящая пластина?



К задаче 8



К задаче 9

Граничные условия

На границе раздела двух сред для нормальных компонент вектора индукции и тангенциальных вектора напряжённости справедливы соотношения, следующие из теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции электрического поля (условие потенциальности поля свободных статических зарядов):

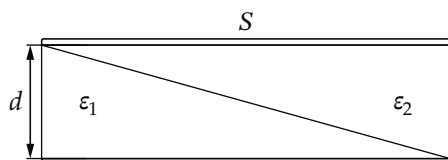
$$D_{2n} = D_{1n}, \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}.$$

9. Определите ёмкость плоского конденсатора (см. рисунок), между обкладками которого располагаются два слоя диэлектрика площадью сечения S_1 и S_2 и толщиной, равной расстоянию между обкладками конденсатора. Диэлектрические проницаемости слоёв равны ϵ_1 и ϵ_2 , ёмкость конденсатора без диэлектрика равна C_0 . Верно ли, что вблизи границы раздела между диэлектриками на каждый из них действует горизонтальная сила?

10. Каким соотношением связаны углы φ_1 и φ_2 , которые линии напряжённости составляют с нормалью к

границе раздела двух сред, диэлектрические проницаемости которых равны ε_1 и ε_2 ?

11. Пространство между обкладками плоского конденсатора площадью S заполнено двумя диэлектриками так, как показано на рисунке. Расстояние между обкладками d значительно меньше их поперечных размеров ($d \ll \sqrt{S}$). Определите ёмкость конденсатора. Опишите (или изобразите) картину линий напряжённости электрического поля между обкладками этого конденсатора, заряженного от батарейки.



12. Чему равна напряжённость поля внутри шара с «замороженным» вектором поляризации $\vec{P}$? Опишите качественно характер изменения поля снаружи шара.

Примечание. В области наложения двух шаров одинаковых радиусов, заряженных с объёмными плотностями ρ и $-\rho$ возникает однородное электрическое поле, равное $\vec{E} = -\frac{\rho \vec{l}}{3\varepsilon_0}$, где $\vec{l}$ — вектор, соединяющий центр отрицательно заряженного шара с центром положительно заряженного.

13. В протяжённой пластине из диэлектрика с проницаемостью ε создано однородное электрическое поле напряжённостью $\vec{E}$. В пластине имеется небольшая (по сравнению с размерами пластины) сферическая полость. Считая поляризованность пластины однородной, определите напряжённость поля внутри полости.

14. Шар из материала с диэлектрической проницаемостью ε вносят в однородное поле напряжённостью E_0 . Предполагая, что шар поляризован однородно, определите напряжённость электрического поля внутри шара. Как распределятся поляризационные заряды по поверхности шара? Убедитесь в том, что электрическая индукция и напряжённость поля, найденные в предположении об однородной поляризованности шара, удовлетворяют граничным условиям и условию на бесконечности, а следовательно дают решение задачи об электрическом поле внутри и вне диэлектрического шара в однородном поле внешних источников.

Плотность электрической энергии

Бесконечно-малое изменение плотности электрической энергии в диэлектрической среде равно скалярному произведению

$$dw = \vec{E} \cdot d\vec{D}.$$

В линейных средах, для которых индукция и напряжённость поля пропорциональны $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, справедливы соотношения

$$w = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{E^2\varepsilon\varepsilon_0}{2}.$$

15. В условиях задачи 2 определите плотность электростатической энергии внутри (w_1) и вне (w_2) диэлектрической пластинки, а также давление, испытываемое поверхностями пластинки, содержащими поляризационные заряды.

16. Диэлектрическая пластина из материала с проницаемостью ε целиком заполняет пространство между обкладками плоского конденсатора, ёмкость которого без диэлектрика равна C_0 . Какую минимальную работу должны совершить внешние силы, чтобы удалить пластину из конденсатора? Рассмотрите два случая: конденсатор заряжен от источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и отключён от источника; конденсатор всё время подключен к источнику.

17. Обкладки плоского конденсатора (находящегося в вакууме) и расположенного горизонтально имеют форму квадратов с длиной стороны L . Расстояние между обкладками равно d . Внутри конденсатора вставлена длинная плоская пластина толщиной d из материала с диэлектрической проницаемостью ε , так что граница раздела между диэлектриком и вакуумом располагается на расстоянии x от края обкладок. Определите горизонтальную силу F_q , действующую на пластину со стороны электрического поля, если конденсатор заряжен от источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и отключён от источника. Чему будет равно значение этой силы ($F_{\mathcal{E}}$), если конденсатор не отключать от источника?

18. Убедитесь в том, что решение предыдущей задачи может быть получено на основе формулы $p = w_2 - w_1$, где w_i — объёмная плотность энергии вблизи границы раздела двух сред в i -ой среде, p — давление на границу раздела.

19. Одна половина проводящего шарика радиусом R с зарядом Q погружена в диэлектрическую жидкость с проницаемостью ε_1 , а другая половина в другую жидкость с диэлектрической проницаемостью ε_2 ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$). Чему равна сила, действующая на шарик со стороны этих жидкостей? Силой тяжести можно пренебречь.

Поляризуемость молекул

Пусть молекула некоторого вещества в поле напряжённостью $\vec{E}$ приобретает дипольный момент $\vec{p}$, тогда коэффициент пропорциональности α в формуле $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$ называется *поляризуемостью* молекулы.

20. Чему равна поляризуемость маленького металлического шарика радиусом r ? Чему равна диэлектрическая проницаемость разреженного газа таких маленьких металлических шариков, если их концентрация равна n ($nr^3 \ll 1$)?

21. Диэлектрическая проницаемость ε плотных неполярных диэлектриков удовлетворяет приближённой формуле Клаузиуса-Мосотти

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{\alpha n}{3},$$

где α — поляризуемость молекулы, n — концентрация молекул. На основании каких модельных представлений выводится эта формула?

Ответы и комментарии

$$1. D = \frac{q}{4\pi r^2}, E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}, P = \frac{q(\epsilon-1)}{4\pi r^2\epsilon};$$

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

$$2. V = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\epsilon_0} h \cdot \frac{\epsilon+1}{\epsilon}, \sigma_{\text{пол}} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\epsilon-1}{\epsilon}.$$

3. Обозначаем индексом I величины, относящиеся к области внутри пластины, а индексом II — величины, относящиеся к области между обкладками вне пластины. $D_{II} = P_d^h$, $E_{II} = \frac{D_{II}}{\epsilon_0} = \frac{Ph}{d\epsilon_0}$, $D_I = D_{II} = P_d^h$, $E_I = \frac{D_I}{\epsilon_0} - \frac{P_I}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{d}\right)$, поле в области I направлено противоположно полю в области II.

5. Рассматриваемая пластина изготовлена из нелинейного диэлектрика. В этом легко убедиться, если заметить, что внутри пластины (в отсутствие внешних источников поля) электрическая индукция равна нулю, а напряжённость поля нулю не равна.

$$6. \sigma = 2,4 \frac{\text{мКл}}{\text{м}^2}, \sigma_{\text{пол}} = \frac{\sigma(\Sigma)}{2\epsilon} = 0,12 \frac{\text{мКл}}{\text{м}^2}.$$

7. $E_A = \frac{P_0}{2\epsilon_0}$, $\frac{E_A}{E_B} = \frac{r^2}{l^2}$, см. также Example 3-2, p. 166 из книги [2]; $E_C = \frac{2h}{D} \cdot E_A = 12 \frac{\text{В}}{\text{см}}$, из точки C верхняя поверхность цилиндра видна под телесным углом $\Omega_{\text{up}} = 2\pi$, а нижняя видна под телесным углом $\Omega_{\text{down}} = 2\pi - \frac{2h}{D}$.

$$8. C = C_0 \cdot \frac{(d_1+d_2)\epsilon_1\epsilon_2}{d_1\epsilon_2+d_2\epsilon_1}; \text{ не изменится.}$$

$$9. C = C_0 \cdot \frac{S_1\epsilon_1+S_2\epsilon_2}{S_1+S_2};$$

$$10. \frac{\lg \varphi_1}{\lg \varphi_1} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \text{ см. §15 из [3].}$$

$$11. C = \frac{S\epsilon_0}{d} \cdot \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1-\epsilon_2} \ln \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

12. $\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$, поле снаружи шара эквивалентно полю диполя с моментом $\vec{p} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{P}$, помещённого в центр шара; см. задачу III.14 из [4], а также задачу 6.2.14 из [5] и §16 в [3].

$$13. \vec{E}_H = \vec{E} \cdot \frac{2+\epsilon}{3}.$$

14. $E(r) = \frac{3E_0}{\epsilon+2}$, $r < R$, где R — радиус шара. Поляризационный заряд распределяется по поверхности шара с плотностью $\sigma(\theta) = 3E_0\epsilon_0 \cdot \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}$.

$$15. w_{II} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)^2}{8\epsilon_0}, w_I = \epsilon w_{II} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)^2 \epsilon}{8\epsilon_0}, p = w_I - w_{II} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)^2}{8\epsilon_0} (\epsilon - 1).$$

$$16. A_q = \frac{C_0 \mathcal{E}^2}{2} \cdot \epsilon(\epsilon - 1); A_{\mathcal{E}} = \frac{C_0 \mathcal{E}^2}{2} \cdot (\epsilon - 1).$$

$$17. F_q = \frac{C_0 \mathcal{E}^2}{2L} \cdot \frac{\epsilon-1}{\left(\frac{x}{L}(\epsilon-1)+1\right)^2}; F_{\mathcal{E}} = \frac{C_0 \mathcal{E}^2}{2L} \cdot (\epsilon - 1);$$

параметр C_0 — ёмкость конденсатора без диэлектрика: $C_0 = \frac{L^2\epsilon_0}{d}$; см. также задачу V.23, стр. 266 из [4].

18. Обратите внимание на тот факт, что силы давления направлены в сторону той среды, в которой объёмная плотность энергии больше.

$$19. F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2(\epsilon_2 + \epsilon_1)^2}.$$

$$20. \alpha = 4\pi r^3, \epsilon = 1 + 4\pi r^3 n; \text{ см. также стр. 133, 134 из книги [4].}$$

21. Сравните формулу Клаузиуса-Мосотти с результатом задачи 14 о поле внутри диэлектрического шара.

Комментарии к списку литературы

При составлении задания использовались задачки [5] и [1]. Теоретический материал разбирается в учебниках [6] (на простом, школьном уровне, система СИ), [7] (довольно коротко, система СИ) и [3] (система СГС). Очень полезной может оказаться книга [4] (система СИ), в которой на примерах задач подробно и понятно разбираются многие сложные вопросы теории. Если вы в состоянии читать литературу на английском языке, то рекомендуем ознакомиться с книгой [2] профессора MIT Маркуса Зана, в которой разбирается большое количество нетривиальных задач, а сложные для понимания рассуждения поясняются понятными рисунками (система СИ).

Список литературы

1. Козел С. М. [и др.]. Сборник задач по общему курсу физики: Учебн. пособие: Для вузов. В трёх частях. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В. А. Овчинкина. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: Физматкнига, 2004. — 400 с.
2. Zahn M. Electromagnetic field theory: a problem solving approach. — Malabar, FL: Krieger Publishing Company, 2003. — 727 с. — URL: <https://docs.google.com/file/d/0B21HoBq6u9TsVk5HVV00S1YyMUK/view>.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учебн. пособие. Для вузов. В 5 т. Т. 3. Электричество. — 6-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2020. — 656 с.
4. Брандт Н. Н., Миронова Г. А., Салецкий А. М. Электростатика в вопросах и задачах. Пособие по решению задач для студентов: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 288 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
5. Задачи по физике: Учебное пособие. / И. И. Воробьёв [и др.]; под ред. О. Я. Савченко. — 4-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2001. — 368 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
6. Бега Р. К., Лебедев В. В., Хлюстиков И. Н. Электростатика. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.
7. Кингсеп А. С., Локишин Г. Р., Ольхов О. А. Основы физики. Курс общей физики: Учебн. В 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А. С. Кингсеп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 506 с.