

Диполь во внешнем поле

Сила и момент сил

Рассмотрим диполь с моментом $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ во внешнем поле с напряжённостью $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Определим силу, действующую на диполь со стороны электрического поля. Пусть $\mathbf{r}_+$ и $\mathbf{r}_-$ — радиус-векторы положительного и отрицательного зарядов диполя. Легко видеть, что радиус-векторы зарядов удовлетворяют равенству

$$\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_- + \mathbf{l}.$$

В линейном приближении по малому параметру $\mathbf{l}$ напряжённость представляется в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_-) + (\mathbf{l} \cdot \nabla \mathbf{E}_x) \hat{\mathbf{e}}_x + (\mathbf{l} \cdot \nabla \mathbf{E}_y) \hat{\mathbf{e}}_y + (\mathbf{l} \cdot \nabla \mathbf{E}_z) \hat{\mathbf{e}}_z,$$

где $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z$ — единичные векторы координатных осей. Последняя формула может быть переписана в виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_-) + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E}.$$

Теперь можно выразить силу:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q(\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) - \mathbf{E}(\mathbf{r}_-)) = \\ &= q(\mathbf{E}(\mathbf{r}_-) + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \mathbf{E}(\mathbf{r}_-)) = \\ &= q(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1)$$

Причём полученное выражение не зависит от того, рассматривается жёсткий диполь или мягкий.

Обсудим теперь один тонкий момент. Иногда формулу для силы, действующей на диполь, записывают в виде

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}). \quad (2)$$

Какое выражение — (1) или (2) — правильное? Формула (1), очевидно, правильная, поскольку математически строго следует из вывода. Формула (2) справедлива только в том случае, если выполняются два условия: $\mathbf{p} = \text{const}$, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Иначе говоря, эта формула верна, если речь идёт о жёстком диполе в электростатическом поле. Для вихревого поля и/или мягкого диполя (момент которого зависит от внешнего поля, а следовательно, и от координат) эта формула даёт неверный результат. Доказательство следует из свойства потенциальности электростатического поля:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Тогда в случае $\mathbf{p} = \text{const}$ формулу (2) можно преобразовать так:

$$(\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}))_i = \sum_j p_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = \sum_j p_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = ((\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E})_i,$$

откуда следует $\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$, что и доказывает эквивалентность формул (1) и (2).

Аналогичным образом можно найти момент сил, действующих на диполь. Поскольку силы, действующие на положительный и отрицательный заряды, примерно равны, момент не зависит от выбора полюса. Пусть полюс находится в начале координат, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= q(\mathbf{r}_+ \times \mathbf{E}(\mathbf{r}_+) - \mathbf{r}_- \times \mathbf{E}(\mathbf{r}_-)) \approx \\ &\approx (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \times q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \\ &= q\mathbf{l} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что момент сил, действующих на диполь, равен нулю при $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}$, то есть когда диполь ориентирован вдоль поля. Таким образом, возможны два положения равновесия: $\mathbf{p} \uparrow \uparrow \mathbf{E}$ и $\mathbf{p} \uparrow \downarrow \mathbf{E}$. Для анализа устойчивости обратимся к энергии жёсткого диполя $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta$, где θ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$. Положение $\theta = 0$ ($\mathbf{p} \uparrow \uparrow \mathbf{E}$) соответствует минимуму энергии и является *устойчивым* положением равновесия: при малом отклонении момент сил возвращает диполь обратно. Положение равновесия $\theta = \pi$ ($\mathbf{p} \uparrow \downarrow \mathbf{E}$) соответствует максимуму энергии и является *неустойчивым*. Как мы увидим позднее, мягкий диполь всегда располагается по полю, так что его положение равновесия всегда будет устойчивым.

Заметим, что формула (3) для момента сил, как и формула (1) для силы, справедлива как для жёсткого, так и для мягкого диполя. Формула же (2) применима только для жёсткого диполя в электростатическом поле, как было показано выше.

Рассмотрим ряд примеров применения формул 1 и 3.

Пример 1. Диполь с моментом p находится на расстоянии r от бесконечной равномерно заряженной нити с линейной плотностью заряда λ . Поле нити:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

Найдём силу, действующую на диполь, для двух ориентаций его момента.

Радиальная ориентация: $\mathbf{p} = p \hat{\mathbf{e}}_r$. Поскольку поле направлено радиально и зависит только от r , из формулы (1) получаем:

$$F_r = p \frac{\partial E_r}{\partial r} = -\frac{p\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Знак «минус» означает притяжение диполя к нити.

Тангенциальная ориентация: $\mathbf{p} = p \hat{\mathbf{e}}_\varphi$. Вычислим силу в декартовых координатах, поместив диполь в точку $(r, 0, 0)$ и направив его момент вдоль оси OY . Компоненты поля нити:

$$E_x = \frac{\lambda x}{2\pi\epsilon_0(x^2 + y^2)}, \quad E_y = \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon_0(x^2 + y^2)}.$$

Из формулы (1):

$$F_x = p \left. \frac{\partial E_x}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad F_y = p \left. \frac{\partial E_y}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{p\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Сила направлена вдоль $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, то есть направление силы совпадает с направлением дипольного момента.

Таким образом, знак силы зависит от ориентации диполя: радиально ориентированный диполь притягивается к нити, тангенциально ориентированный — испытывает силу вдоль касательной. Это наглядно иллюстрирует общий результат: сила, действующая на жёсткий диполь в неоднородном поле, определяется не только величиной градиента поля, но и взаимной ориентацией диполя и поля.

Пример 2. Диполь с моментом $\mathbf{p}_1 = p \hat{\mathbf{e}}_x$, сонаправленным единичному вектору $\hat{\mathbf{e}}_x$, находится в начале координат. В точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = y \hat{\mathbf{e}}_y$ находится второй

диполь, момент которого по модулю равен p и составляет угол φ с вектором $\hat{e}_x$:

$$\mathbf{p}_2 = p \cos \varphi \hat{e}_x + p \sin \varphi \hat{e}_y.$$

Найдём силу, действующую на второй диполь, а также момент сил, действующих на него.

Поле первого диполя в точке $(0, y, 0)$: поскольку $\mathbf{p}_1 \perp \hat{e}_y$, формула для напряжённости поля диполя даёт

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 y^3} \hat{e}_x.$$

Из соотношения (1) находим компоненты силы:

$$F_x = p_{2x} \left. \frac{\partial E_{1x}}{\partial x} \right|_{x=0} + p_{2y} \frac{\partial E_{1x}}{\partial y} = \frac{3p^2 \sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 y^4},$$

$$F_y = p_{2x} \left. \frac{\partial E_{1y}}{\partial x} \right|_{x=0} + p_{2y} \frac{\partial E_{1y}}{\partial y} = 0,$$

где учтено, что $E_{1y} = 0$ вдоль оси OY , а $\partial E_{1x}/\partial x = 0$ при $x = 0$ из соображений симметрии. Таким образом, сила направлена вдоль оси OX :

$$\mathbf{F} = \frac{3p^2 \sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 y^4} \hat{e}_x.$$

Она направлена по вектору $\hat{e}_x$, если угол φ острый, и в противоположном направлении, если угол φ тупой.

Момент сил, действующих на второй диполь, равен

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_2 \times \mathbf{E}_1 = \frac{p^2 \sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 y^3} \hat{e}_z.$$

Положительный знак M_z при $0 < \varphi < 90^\circ$ означает, что момент сил стремится увеличить угол φ . При $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ знак M_z отрицателен, и момент сил стремится уменьшить угол φ . Таким образом, устойчивым положением равновесия является $\varphi = 180^\circ$: второй диполь направлен против $\hat{e}_x$, то есть антипараллельно первому, что соответствует ориентации вдоль поля $\mathbf{E}_1$ в точке расположения второго диполя.

Пример 3. Диполь с моментом p располагается рядом с бесконечной проводящей плоскостью. При этом диполь находится на расстоянии h от плоскости, а его момент образует угол φ с плоскостью. Определим силу, действующую на диполь.

Заряды диполя, расположенного над плоскостью, индуцируют заряды на поверхности проводника, поле которых эквивалентно полю зарядов-изображений. Таким образом, исходный диполь взаимодействует с полем своего изображения. Пусть оси OX и OY направлены соответственно параллельно и перпендикулярно плоскости. Тогда векторы дипольных моментов задаются своими координатами:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} p \cos \varphi \\ p \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -p \cos \varphi \\ p \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Индексом 1 обозначен физически существующий диполь, а индексом 2 — его изображение. Пусть диполь 1 расположен в точке с координатами $x = 0, y = h$, тогда диполь-изображение находится в точке $x = 0, y = -h$.

Далее будем считать заряды-изображения «замороженными» (неподвижными) и найдём поле, которое они

создают в точке (x, y) над плоскостью. Для удобства исключим координату z из рассмотрения. Обозначим через $\mathbf{R}$ вектор, проведённый из точки $(0, -h)$ в точку (x, y) . Тогда

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} x \\ y + h \end{pmatrix}, \quad R = \sqrt{x^2 + (y + h)^2}.$$

Для дальнейшего вычислим производные от R^{-5} :

$$\frac{\partial(R^{-5})}{\partial x} = -\frac{5x}{R^7}, \quad \frac{\partial(R^{-5})}{\partial y} = -\frac{5(y + h)}{R^7}; \quad (4)$$

и от R^{-3} :

$$\frac{\partial(R^{-3})}{\partial x} = -\frac{3x}{R^5}, \quad \frac{\partial(R^{-3})}{\partial y} = -\frac{3(y + h)}{R^5}. \quad (5)$$

Проекция поля диполя-изображения $\mathbf{p}_2$ в произвольной точке над плоскостью равны:

$$E_{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{R}) R_x}{R^5} - \frac{p_{2x}}{R^3} \right) =$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(-x \cos \varphi + (y + h) \sin \varphi)x}{R^5} + \frac{\cos \varphi}{R^3} \right], \quad (6)$$

$$E_{2y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(-x \cos \varphi + (y + h) \sin \varphi)(y + h)}{R^5} - \frac{\sin \varphi}{R^3} \right]. \quad (7)$$

Для нахождения силы $\mathbf{F} = (\mathbf{p}_1 \cdot \nabla) \mathbf{E}_2$ вычислим производные от проекций поля в точке $(0, h)$, где $R = 2h$. Вычисления громоздкие и используют формулы (5) и (4). Вычислим подробно только производную $\frac{\partial E_{2x}}{\partial x}$ в точке $(0, h)$, а остальные значения приведём сразу. Из (6) следует:

$$\left. \frac{\partial E_{2x}}{\partial x} \right|_{0,h} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{3(-x^2 \cos \varphi)}{R^5} + \frac{3x(y + h) \sin \varphi}{R^5} + \frac{\cos \varphi}{R^3} \right]_{0,h}.$$

Заметим, что все производные, в которых сохраняется множитель x в числителе, обращаются в нуль при $x = 0$, $y = h$. Поэтому ненулевой вклад даёт только среднее слагаемое:

$$\left. \frac{\partial E_{2x}}{\partial x} \right|_{0,h} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(y + h) \sin \varphi}{R^5} = \frac{3p \sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 (2h)^4}.$$

Аналогично:

$$\left. \frac{\partial E_{2x}}{\partial y} \right|_{0,h} = -\frac{3p \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 (2h)^4},$$

$$\left. \frac{\partial E_{2y}}{\partial x} \right|_{0,h} = -\frac{3p \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 (2h)^4},$$

$$\left. \frac{\partial E_{2y}}{\partial y} \right|_{0,h} = -\frac{6p \sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 (2h)^4}.$$

Теперь используем формулу (1) в проекциях:

$$F_i = p_{1x} \frac{\partial E_{2i}}{\partial x} + p_{1y} \frac{\partial E_{2i}}{\partial y}.$$

Для x -компоненты:

$$F_x = \frac{3p^2}{4\pi\epsilon_0(2h)^4} (\cos\varphi \sin\varphi + \sin\varphi(-\cos\varphi)) = 0.$$

Для y -компоненты:

$$F_y = \frac{3p^2}{4\pi\epsilon_0(2h)^4} (\cos\varphi(-\cos\varphi) - \sin\varphi(2\sin\varphi)) = \\ = -\frac{3p^2(2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{64\pi\epsilon_0h^4}.$$

Окончательно, учитывая $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, получаем:

$$\mathbf{F} = \left(0, -\frac{3p^2(1 + \sin^2\varphi)}{64\pi\epsilon_0h^4}, 0\right). \quad (8)$$

Из (8) следует, что диполь при любой ориентации притягивается к плоскости. Модуль силы притяжения определяется множителем $(1 + \sin^2\varphi)$, который принимает наименьшее значение при горизонтальной ориентации ($\varphi = 0$) и наибольшее — при вертикальной ($\varphi = 90^\circ$):

$$|F_y|_{\min} = \frac{3p^2}{64\pi\epsilon_0h^4}, \quad |F_y|_{\max} = \frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0h^4}.$$

Таким образом, вертикально ориентированный диполь притягивается к плоскости вдвое сильнее, чем горизонтальный. На самом деле, вычисление силы можно значительно упростить, используя «энергетический» способ, который будет рассмотрен ниже.

Найдём также вращающий момент $\mathbf{M} = [\mathbf{p}_1 \times \mathbf{E}_2]$ сил, действующих на диполь. Используем выражение для поля изображения в точке $(0, h)$, которое можно получить, например, из (6) и (7):

$$\mathbf{E}_2 = \frac{p}{32\pi\epsilon_0h^3} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим векторное произведение, учитывая, что векторы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{E}_2$ лежат в одной плоскости XOY . Момент имеет только z -проекцию:

$$M_z = p_{1x}E_{2y} - p_{1y}E_{2x} = E_{2y}p\cos\varphi - E_{2x}p\sin\varphi.$$

Подставляя компоненты поля, получаем:

$$M_z = \frac{p^2}{32\pi\epsilon_0h^3} (2\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) = \\ = \frac{p^2\sin 2\varphi}{64\pi\epsilon_0h^3}. \quad (9)$$

Положительный знак M_z при $0 < \varphi < 90^\circ$ означает, что момент сил стремится развернуть диполь перпендикулярно плоскости (увеличить угол φ). Таким образом, устойчивым положением равновесия является вертикальная ориентация диполя ($\varphi = 90^\circ$).

Энергия диполя, мягкие и жёсткие диполи

Сначала определим энергию взаимодействия жёсткого диполя с внешним электрическим полем. Жёстким мы называем диполь, расстояние между зарядами которого фиксировано. Аналогично выводу формулы для силы,

можно записать следующую цепочку равенств для энергии диполя во внешнем поле:

$$W = q(\varphi(\mathbf{r}_+) - \varphi(\mathbf{r}_-)) = q\varphi(\mathbf{r}_-) + q(\mathbf{l} \cdot \nabla\varphi) - \\ - q\varphi(\mathbf{r}_-) = q(\mathbf{l} \cdot \nabla\varphi) = (\mathbf{p} \cdot \nabla\varphi).$$

Поскольку $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, из последней формулы получаем выражение для энергии взаимодействия диполя с полем

$$W = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \quad (10)$$

Теперь разберём случай мягкого диполя. Поясним, что имеется в виду. Дело в том, что существуют объекты, у которых дипольный момент возникает только во внешнем электрическом поле. В отсутствие поля их дипольный момент равен нулю.

Энергией системы зарядов в электростатическом поле мы называем работу, совершаемую внешними силами по перемещению зарядов из бесконечности в те точки, где они в итоге располагаются. При выводе формулы (10) мы фактически вычисляем работу, совершаемую внешними силами при бесконечно медленном перемещении жёсткого диполя из бесконечности в некоторую точку поля. Энергия взаимодействия зарядов диполя друг с другом не учитывается, поскольку она в процессе перемещения не изменяется.

Теперь рассмотрим мягкий диполь. При его перемещении из бесконечности работа внешних сил расходуется не только на перемещение диполя как целого, но и на разделение зарядов диполя, на создание дипольного момента. Можно сказать, что за счёт работы внешних сил изменяется не только энергия диполя во внешнем поле, но и энергия взаимодействия зарядов диполя.

Вывод выражения для энергии следует модифицировать. Пусть заряды диполя $-q$ и $+q$ располагаются в точках с координатами $\mathbf{r}_-$ и $\mathbf{r}_+$. Обозначим через $\mathbf{r}$ радиус-вектор центра диполя, тогда

$$\mathbf{r}_+ = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2}, \quad \mathbf{r}_- = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2}.$$

Используем приближение точечного диполя: $|\mathbf{l}| \ll |\mathbf{r}|$. Тогда напряжённость поля в точках расположения зарядов диполя даётся приближёнными формулами

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{E}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}_-) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{E}.$$

Определим суммарную мощность сил взаимодействия диполя с внешним электрическим полем

$$\frac{\delta A_E}{dt} = q \cdot \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) \cdot \frac{d\mathbf{r}_+}{dt} - \mathbf{E}(\mathbf{r}_-) \cdot \frac{d\mathbf{r}_-}{dt} \right).$$

Эта формула с использованием приближённых выражений для напряжённости приводится к виду

$$\frac{\delta A_E}{dt} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot ((\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}). \quad (11)$$

С одной стороны, формула (11) может быть представлена в виде полной производной выражения $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ по времени. Действительно:

$$\frac{d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})}{dt} = \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \sum_{i,j} p_i \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}. \quad (12)$$

С учётом свойства потенциальности электростатического поля:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j,$$

второе слагаемое в выражении (12) преобразуется так:

$$\sum_{i,j} p_i \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_{i,j} \left(p_i \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot ((\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}).$$

Иными словами, формула (12) тождественными преобразованиями сводится к (11), так что для бесконечно малых изменений справедливо равенство

$$\delta A_E = d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}). \quad (13)$$

С другой стороны, второе слагаемое в (12) можно записать так:

$$\sum_{i,j} p_i \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_{i,j} \frac{\partial x_j}{\partial t} \cdot \left(p_i \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \Big|_{\mathbf{p}=\text{const}}.$$

Обозначим через Ω вектор угловой скорости диполя, а $\hat{\mathbf{e}}_l$ — единичный вектор, направленный вдоль вектора $\mathbf{l}$ плеча диполя. Поскольку в общем случае диполь может поворачиваться и одновременно величина его дипольного момента может меняться, производная дипольного момента по времени представляется в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dp}{dt} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l + \Omega \times \mathbf{p}$$

Тогда выражение для мощности (11) принимает вид:

$$\frac{\delta A_E}{dt} = \underbrace{(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l) \frac{dp}{dt}}_{\text{деформация}} + \underbrace{\mathbf{E} \cdot (\Omega \times \mathbf{p})}_{\text{вращение}} + \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \Big|_{\mathbf{p}}}_{\text{перенос}}. \quad (14)$$

В формуле (14) первое слагаемое соответствует мощности, затрачиваемой на изменение внутренней энергии диполя, иначе говоря на его деформацию. Второе слагаемое соответствует мощности, затрачиваемой на поворот дипольного момента в поле, а третье — на перенос постоянного дипольного момента из одной точки поля в другую. Обозначим через W_{int} внутреннюю энергию диполя, увеличивающуюся за счёт работы поля по деформации диполя, тогда бесконечно малое изменение энергии взаимодействия диполя с полем равно

$$dW = -\delta A_E + dW_{\text{вн}} = -d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) + dW_{\text{вн}}. \quad (15)$$

При выводе (15) использовалось выражение (13) для работы поля. Отметим, что изменение внутренней энергии в формуле (15), очевидно, равно

$$dW_{\text{вн}} = (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l) dp.$$

Теперь становится понятным различие между жёстким и мягким диполями. Для жёсткого диполя $dW_{\text{вн}} = 0$, так что энергия взаимодействия с полем даётся формулой (10). Для мягкого диполя с моментом $\mathbf{p} = k\varepsilon_0 V \mathbf{E}$, где k — численный коэффициент, внутренняя энергия выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{\text{вн}} &= k\varepsilon_0 V \int (\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{E}') = k\varepsilon_0 V \int (\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{E}') = \\ &= k\varepsilon_0 V \frac{E^2}{2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}{2}. \end{aligned}$$

Тогда из (15) получается такая формула для энергии взаимодействия мягкого диполя с полем

$$W = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})}{2} = -\frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})}{2}. \quad (16)$$

Сравним силы, действующие на жёсткий и мягкий диполи в неоднородном поле. Для жёсткого диполя сила равна $\mathbf{F} = -\nabla W = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$.

В случае же мягкого диполя, подставляя (16) в формулу $\mathbf{F} = -\nabla W$, находим:

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\frac{k\varepsilon_0 V}{2} E^2 \right) = k\varepsilon_0 V E \nabla E. \quad (17)$$

Это выражение показывает, что мягкий диполь всегда втягивается в область большей напряжённости поля, в то время как поведение жёсткого диполя существенно зависит от его начальной ориентации относительно вектора $\mathbf{E}$.

Пример 4. Рассмотрим взаимодействие маленького металлического шарика с полем точечного заряда. Пусть шарик радиусом r находится на расстоянии R ($R \gg r$) от точечного заряда Q . Во внешнем поле металлический шарик поляризуется; его индуцированный дипольный момент равен

$$\mathbf{p} = 3\varepsilon_0 V \mathbf{E}, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Поскольку шарик является мягким диполем, для нахождения силы используем формулу (17):

$$\mathbf{F} = 3\varepsilon_0 V E \nabla E = \frac{3\varepsilon_0 V}{2} \nabla(E^2).$$

Подставляем $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$ и $V = \frac{4}{3}\pi r^3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{3\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \nabla \left(\frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 R^4} \right) = \frac{r^3 Q^2}{8\pi \varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{4}{R^5} \right) \hat{\mathbf{e}}_R = \\ &= -\frac{r^3 Q^2}{2\pi \varepsilon_0 R^5} \hat{\mathbf{e}}_R. \end{aligned}$$

Знак «минус» означает притяжение шарика к заряду Q . Модуль силы убывает как R^{-5} , что характерно для взаимодействия заряда с индуцированным диполем.

Пример 5. Рассмотрим задачу о взаимодействии диполя с проводящей бесконечной плоскостью. Диполь находится на расстоянии h от плоскости и составляет угол φ с ней. Дипольный момент исходного диполя и поле диполя-изображения в точке расположения исходного диполя равны:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} p \cos \varphi \\ p \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{p}{32\pi\varepsilon_0 h^3} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (18)$$

На первый взгляд, энергия взаимодействия диполя с полем диполя-изображения даётся выражением $W = -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2$. Однако при ближайшем рассмотрении становится ясно, что это выражение неверное. Использованная формула применима только в том случае, когда внешнее поле создаётся независимыми источниками. В нашем случае поле $\mathbf{E}_2$ порождается индуцированными зарядами на плоскости, которые сами возникают под действием поля диполя $\mathbf{p}_1$.

Попробуем найти правильное выражение для энергии взаимодействия. Будем считать, что диполь образован

двумя маленькими заряженными проводящими шариками. Тогда система состоит из трёх проводников: два шарика с зарядами $+q$, $-q$ и бесконечная плоскость. Воспользуемся общим выражением для энергии системы проводников:

$$W_0 = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i.$$

Тогда выражение

$$W_0 = \frac{q}{2} \cdot (\varphi_{\text{пл}}^{(+)} + \varphi_{\text{ш}}^{(+)} - \varphi_{\text{пл}}^{(-)} - \varphi_{\text{ш}}^{(-)}),$$

где $(\varphi_{\text{ш}}^{(+)} + \varphi_{\text{пл}}^{(+)})$ — потенциал поля индуцированных зарядов плоскости и шарика с зарядом $-q$ в точке, где находится шарик с зарядом $+q$, $(\varphi_{\text{пл}}^{(-)} + \varphi_{\text{ш}}^{(-)})$ — потенциал поля индуцированных зарядов плоскости и шарика с зарядом $+q$ в точке, где находится шарик с зарядом $-q$.

Энергию W_0 можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$W_0 = W_{\text{ш}} + W_{\text{пл}},$$

где $W_{\text{ш}}$ — энергия взаимодействия шариков диполя друг с другом, она задаётся выражением

$$W_{\text{ш}} = \frac{q}{2} (\varphi_{\text{ш}}^{(+)} - \varphi_{\text{ш}}^{(-)}),$$

а $W_{\text{пл}}$ — энергия взаимодействия индуцированных зарядов плоскости с шариками диполя; она в свою очередь даётся формулой

$$W_{\text{пл}} = \frac{q}{2} (\varphi_{\text{пл}}^{(+)} - \varphi_{\text{пл}}^{(-)}).$$

Отметим, что в выражение для W_0 не входит энергия взаимодействия зарядов плоскости друг с другом. Она равна нулю, поскольку и потенциал и суммарный заряд плоскости равны нулю.

При расчёте силы, как градиента энергии: $\mathbf{F} = -\nabla W$, следует положить $W = W_{\text{пл}}$, поскольку энергия взаимодействия шариков диполя друг с другом $W_{\text{ш}}$ при малых перемещениях диполя не меняется.

Поскольку $\varphi_{\text{пл}}^{(+)} - \varphi_{\text{пл}}^{(-)} = -\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l}_1$, для энергии взаимодействия имеем формулу

$$W = W_{\text{пл}} = -\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2}{2}.$$

Полученное выражение отличается в два раза от «неправильной» формулы $W = -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2$, записанной в начале. Физический механизм, объясняющий возникновение множителя $\frac{1}{2}$ отличается от того, что приводит к появлению множителя $\frac{1}{2}$ в задаче определения энергии мягкого диполя во внешнем поле. В нашем случае, никакого внешнего поля нет, впрочем и диполь является жёстким, а не мягким.

Таким образом, для энергии с учётом выражений (18) окончательно имеем формулу:

$$W = -\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2}{2} = -\frac{p^2(1 + \sin^2 \varphi)}{64\pi\epsilon_0 h^3}.$$

Тогда сила, действующая на диполь, получится дифференцированием энергии по h :

$$F_y = -\frac{dW}{dh} = -\frac{3p^2(1 + \sin^2 \varphi)}{64\pi\epsilon_0 h^4}.$$

Легко видеть, что полученный результат совпадает формулой (8), полученной силовым способом.