

Электрический ток

Модуль заряда электрона e равен $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Вектор плотности тока

Для описания коллективного движения электронов в проводящих средах вводится вектор плотности тока $\vec{j} = -en_e\vec{v}$, где n_e — концентрация электронов в проводящей среде, $\vec{v}$ — средняя скорость коллективного направленного движения электронов. Сила тока равна количеству заряда, проходящего за единицу времени через поверхность, перпендикулярную линиям тока: $I = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dt}$.

1. В генераторе Ван-де-Граафа прорезиненная лента шириной $a = 25$ см, переносящая заряд, движется со скоростью $v = 20$ м/с. Заряд сообщается ленте у нижнего шкива источником постоянного напряжения. Диаметр верхней сферы генератора равен 1 м. Определите максимально возможный потенциал верхней сферы, а также максимальный ток, который можно получить от такого генератора. Пробой воздуха происходит при напряжённости электрического поля $E_b = 30$ кВ/см.

2. В ускорителе пучок протонов движется по круговой орбите радиусом r со скоростью v . Средний ток в пучке равен I . Найдите суммарный заряд протонов пучка.

3. Оцените скорость направленного движения электронов в медном проводе сечением $S = 2,5$ мм² при силе тока $I = 1$ А. Молярная масса меди и её плотность равны: $\mu = 64$ г/моль и $\rho = 8,9$ г/см³.

4. Катод и анод в вакуумном диоде представляют собой две параллельные металлические пластины площадью $S = 10$ см² с зазором толщиной $d = 0,5$ см между ними. При напряжении $U = 5000$ В между катодом и анодом течёт ток, равный 1 А. Считая поле между пластинами однородным, определите плотность заряда в зависимости от расстояния до катода. Начальную скорость электронов считайте равной нулю.

Законы Ома и Джоуля (в дифференциальной форме)

Плотность стационарного (квазистационарного) тока $\vec{j}$ в проводящей среде пропорциональна напряжённости электрического поля:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}.$$

Коэффициент пропорциональности σ зависит от свойств проводящей среды и называется *проводимостью* этой среды. Удельное сопротивление среды ρ — величина обратная проводимости, $\rho = \frac{1}{\lambda}$.

Если плотность тока в точке с проводимостью σ равна j , то объёмная плотность тепла, выделяющегося за время dt в объёме dV вблизи этой точки равна

$$w_Q = \frac{\delta Q}{dV} = \frac{j^2}{\lambda} dt.$$

5. Цилиндр из вещества с проводимостью λ имеет длину l и поперечное сечение S . Разность потенциалов между его торцами равна U . Определите плотность тока в цилиндре и полный ток через него.

6. Плотность тока j направлена перпендикулярно плоскости раздела двух сред с удельным сопротивлением ρ_1 и ρ_2 . Найдите поверхностную плотность заряда на этой плоскости.

7. Заряд металлического шара в ионизованном воздухе уменьшается в два раза каждые 10 мин. Найдите проводимость воздуха при данных условиях.

8. В среде с малой проводимостью λ находится металлический шар радиусом r . Определите ток, стекающий с шара, если его потенциал равен φ . Если такой шар подсоединить изолированным проводом к громоотводу, то чему будет равно сопротивление заземления?

9. В вакууме ёмкость конденсатора, образованного двумя металлическими электродами, равна C . Предположим, что всё пространство заполнили слабо проводящей однородной средой с диэлектрической проницаемостью ϵ и проводимостью λ . Покажите, что сопротивление между электродами даётся формулой $R = \frac{\epsilon_0}{\lambda C}$ вне зависимости от формы электродов.

10. Установившийся ток течёт через плоскую границу раздела двух сред с разной проводимостью. В первой среде, проводимость которой равна λ_1 , линии тока образуют угол α_1 с нормалью к границе раздела. Какой угол образуют с этой нормалью линии тока во второй среде, проводимость которой равна λ_2 ? Чему равна поверхностная плотность заряда на границе раздела сред? Плотность тока в первой среде равна j .

11. Вектор плотности тока направлен вдоль оси цилиндрического проводника радиусом R_0 , а модуль плотности тока зависит от расстояния r до этой оси по закону: $j(r) = j_0 \left(1 - \frac{r}{R_0}\right)$, где j_0 — известная постоянная. Найдите силу тока в проводнике. Как зависит от r проводимость материала цилиндра, если его длина равна L , напряжение между концами равно U , а поле внутри цилиндра предполагается однородным?

Законы Ома и Джоуля (в интегральной форме)

Напряжение между концами проводника U связано с силой тока через любую поверхность, перпендикулярную линиям тока, соотношением

$$U = IR,$$

Коэффициент пропорциональности R — сопротивление проводника.

В проводнике сопротивлением R при силе тока, текущего через него, равной I , за время dt выделяется количество теплоты

$$\delta Q = I^2 R dt.$$

12. Решите задачи 4.17 и 4.18 из задачника под ред. Овчинкина [1]. При решении обеих задач можно вычислить напряжение между концами проводника, используя соображения симметрии для определения распределения плотности тока.

13. Пространство между обкладками плоского конденсатора, находящегося в невесомости, заполнено двумя не смешивающимися диэлектрическими жидкостями с одинаковой диэлектрической проницаемостью ϵ . Граница раздела жидкостей параллельна об-

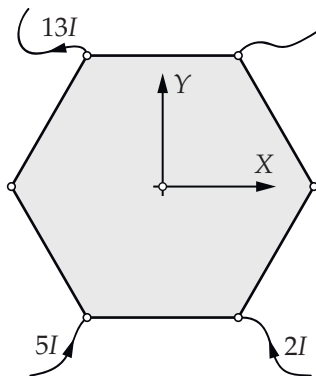
кладкам конденсатора. Толщина слоя каждой жидкости равна половине расстояния между обкладками. Удельные сопротивления жидкостей равны ρ и 2ρ . Найдите электростатическое давление одной жидкости на другую, если через конденсатор течёт постоянный ток I . Площади обкладок равны S . Чему равна поверхностная плотность заряда на обкладках?

14. В условиях предыдущей задачи диэлектрические проницаемости жидкостей различаются в два раза: проницаемость первой жидкости равна ϵ , а второй равна 2ϵ . Чему равна суммарная поверхностная плотность зарядов (поляризационных и свободных) на границе раздела жидкостей?

15. Некоторое вещество обладает нелинейной проводимостью, так что удельное сопротивление ρ этого вещества зависит от напряжённости E электрического поля по закону: $\rho(E) = \rho_0 + AE^2$. Этим веществом заполнено всё пространство между пластинами плоского конденсатора, площадь которых равна S . Через конденсатор течёт ток. Найдите максимально возможное значение силы тока $I_{\max}$. Диэлектрическая проницаемость вещества равна 1.

Если расстояние между пластинами конденсатора равно d , то чему равна максимальная тепловая мощность, которая может выделяться внутри конденсатора при изменении напряжения между пластинами? Постройте качественный график зависимости выделяющейся мощности P от напряжения U между пластинами.

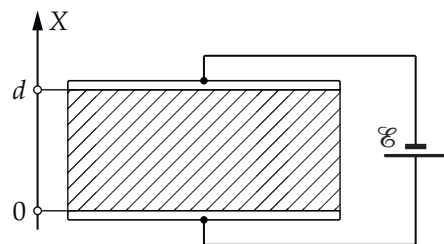
16. К четырём вершинам плоской однородной проводящей пластины в форме правильного шестиугольника подключены идеальные проводники (см. рисунок). Токи в трёх из четырёх проводников равны: $13I$, $5I$ и $2I$ и направлены так, как показано на рисунке. Оси системы координат XOY перпендикулярны двум сторонам шестиугольника. Укажите знаки проекций вектора напряжённости электрического поля E_x и E_y в центре шестиугольника и найдите их отношение.



17. Обкладки плоского конденсатора площадью S располагаются на небольшом расстоянии d друг от друга ($d \ll \sqrt{S}$), пространство между обкладками заполнено слабопроводящей жидкостью с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и проводимостью λ . Вдали от краёв пластин на одинаковом от них расстоянии внутри конденсатора удерживается очень маленький непроводящий шарик радиусом r ($r \ll d$) из материала с

диэлектрической проницаемостью $\epsilon_2 = 1$. Конденсатор подключен к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$. Предполагая, что наличие шарика не меняет однородного распределения зарядов по поверхности пластин, определите напряжённость электрического поля в шарике в двух случаях: а) $\epsilon_1 = 1$; б) $\epsilon_1 = \epsilon \neq 1$. Определите также в условиях случая б) при каком значении диэлектрической проницаемости жидкости ϵ^* поверхностная плотность свободных зарядов на границе раздела диэлектрика шарика будет равна нулю в любой точке.

18. Плоский конденсатор ёмкостью C_0 заполнен слабопроводящей слоистой средой, с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 1$, удельное сопротивление которой зависит от расстояния x до одной из обкладок по закону $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{2x}{d}\right)$, где d — расстояние между обкладками конденсатора (см. рисунок). Конденсатор подключен к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ и нулевым внутренним сопротивлением. Найдите: а) силу тока, протекающего через конденсатор; б) заряды нижней (q_1) и верхней (q_2) обкладок конденсатора, а также заряд q , распределённый в среде между обкладками; с) электрическую энергию W , локализованную в пространстве между обкладками конденсатора.



Ответы и комментарии

- $U = \frac{E_b D}{2} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ В}$, $I_{\max} = 2E_b \epsilon_0 \cdot va \approx 0,27 \text{ мА}$.
- $q = \frac{2\pi r I}{v}$.
- $u = \frac{I\mu}{\rho e N_A} \approx 0,03 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$.
- $\rho(x) = \frac{I}{S} \cdot \sqrt{\frac{ed}{2Ux}}$.
- $j = \frac{U\lambda}{l}$, $I = \frac{US\lambda}{l}$.
- $|\sigma| = j\epsilon_0 \cdot |\rho_2 - \rho_1|$.
- $\lambda = \frac{\epsilon_0}{\tau} \cdot \ln 2$.
- $I = 4\pi\lambda r \cdot \varphi$, $R = \frac{1}{4\pi\lambda r}$.
- Можно окружить любую обкладку воображаемой замкнутой поверхностью и воспользоваться законом Ома и теоремой Гаусса. См. также §46 из [2].
- $\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\sigma = j\epsilon_0 \cos \alpha_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$.
- $I = j_0 \cdot \frac{\pi R_0^2}{3}$, $\lambda(r) = \frac{j_0 l}{U} \left(1 - \frac{r}{R_0}\right)$.
- $R = \frac{1}{\pi\delta\lambda} \cdot \frac{2l}{D-d} \ln \frac{D}{d}$, $R = \frac{1}{\pi\delta\lambda} \left(\frac{l}{D} + \ln \frac{D}{d}\right)$. В 4.17 плотность тока и напряжённость направлены вдоль слоя; выразите из закона Ома напряжённость и проинтегрируйте вдоль слоя, чтобы получить напряжение. В 4.18 сопротивление банки равно $R = R_{\text{бок}} + 2R_{\text{осн}}$, где сопротивление боковой поверхности $R_{\text{бок}} = \frac{l}{\lambda\pi D\delta}$. Сопротивление основания находится после интегрирования напряжённости по радиусу, что даёт напряжение.

$$13. p = \frac{3\varepsilon_0(I\rho)^2}{2S^2}, \sigma = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{3I\rho}{2S}.$$

$$14. \sigma^{(\Sigma)} = \frac{I\rho}{S} \varepsilon_0 (2 - 3\varepsilon).$$

$$15. I_{\max} = \frac{S}{2\sqrt{\rho_0 A}}; P(U) = \frac{U^2}{\rho_0 d^2 + AU^2} \cdot Sd, P_{\max} = \frac{Sd}{A}.$$

$$16. E_x < 0, E_y < 0; \frac{E_x}{E_y} = -\frac{8}{7\sqrt{3}}.$$

$$17. \text{В обоих случаях внутри шарика } E = \frac{3\mathcal{E}}{2\varepsilon_0 d}; \varepsilon^* = \frac{5}{2}.$$

$$18. \text{a) } i = \frac{C_0 \mathcal{E}}{2\varepsilon_0 \rho_0}; \text{ b) } q_1 = \frac{C_0 \mathcal{E}}{2}, q_2 = -\frac{3C_0 \mathcal{E}}{2}, q = C_0 \mathcal{E};$$

$$\text{c) } W = \frac{13C_0 \mathcal{E}^2}{24}.$$

Комментарии к списку литературы

При составлении задания использовались задачки [1] и [3], электронный архив задач Всероссийской олимпиады по физике [4] и ресурс [5]. Теоретический материал можно освоить по учебнику Сивухина [2] (§§ 40-42, система СГС) или книге [6] (гл. 3, стр. 191, система СИ, весьма коротко).

Список литературы

1. Козел С. М. [и др.]. Сборник задач по общему курсу физики: Учебн. пособие: Для вузов. В трёх частях. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В. А. Овчинкина. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматкнига, 2004. — 400 с.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учебн. пособие. Для вузов. В 5 т. Т. 3. Электричество. — 6-е изд., стереот. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2020. — 656 с.
3. Задачи по физике: Учебное пособие. / И. И. Воробьёв [и др.] ; под ред. О. Я. Савченко. — 4-е изд., испр. — СПб. : Издательство «Лань», 2001. — 368 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
4. *4ipho.ru*. Сайт подготовки национальных команд РФ к Международной олимпиаде по физике IPhO и Международной естественно-научной олимпиаде юниоров IJSO [Электронный ресурс]. — 2015. — URL: <http://www.4ipho.ru/archivy-zadach/> (дата обр. 15.04.2022).
5. *Pho.rs*. Архив задач некоторых международных олимпиад и квалификационных сборов [Электронный ресурс]. — 2020. — URL: <https://pho.rs> (дата обр. 05.05.2022).
6. Кингсеп А. С., Локшин Г. Р., Ольхов О. А. Основы физики. Курс общей физики: Учебн. В 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А. С. Кингсеп. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 506 с.