

Поле диполя. Диполь в поле

Упражнения

1. На оси OX в точках с координатами $(-0,5L, 0)$ и $(0,5L, 0)$ располагаются отрицательный $-q$ и положительный q точечные заряды. Определите напряжённость и потенциал поля системы зарядов в точке A с координатами $(x, 0)$ и точке B с координатами $(0, y)$. Считайте, что значения координат точек x и y значительно больше L .

Обозначения

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
 $f(x, y, z) \equiv f(\mathbf{r})$ — функция трёх пространственных координат;
 $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Вычислите: ∇r ; $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$; $\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)$; $\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$, где $\mathbf{p} = \text{const}$. Ответ выразите через вектор $\mathbf{r}$ и его модуль r .

3. Получите формулу для потенциала поля *точечного* ($l \ll r$) диполя с моментом $\mathbf{p} = ql$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Примечание. Можно использовать приближённое равенство $f(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla f$, справедливое при малых δr ($\delta r \ll r$), для определения потенциала поля одного из зарядов диполя или реализовать прямой расчёт с использованием приближённых соотношений типа $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$.

4. Дипольный момент системы зарядов $\{q_i\}$ даётся формулой $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i$, где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор заряда q_i . Какому условию должны удовлетворять заряды системы, чтобы её дипольный момент не изменялся при линейных преобразованиях (трансляциях и вращениях) системы координат?

5. Выведите формулу для напряжённости поля точечного диполя

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right).$$

Примечание. Вывод можно сделать несколькими способами: сложением полей, используя формулу $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$ для преобразования выражений, содержащих малый параметр $\frac{l}{r}$; дифференцируя потенциал по формуле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$; представив дипольный момент в виде суммы двух векторов $\mathbf{p} = \mathbf{p}_r + \mathbf{p}_\varphi$, один из которых коллинеарен радиус-вектору $\mathbf{r}$, а другой — ортогонален.

6. Точечный диполь располагается в начале отсчёта. Угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ точки A и дипольным моментом равен φ . Найдите радиальную и тангенциальную компоненты напряжённости поля диполя с моментом $\mathbf{p}$ в точке A .

7. Покажите, что энергия точечного диполя с моментом $\mathbf{p}$ в поле с напряжённостью $\mathbf{E}$ даётся формулой

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Примечание. Имеет смысл сначала разобрать одномерный случай и получить формулу $W = -p_x E_x$.

8. Покажите, что сила $\mathbf{F}$, действующая на точечный диполь в поле с напряжённостью $\mathbf{E}$, а также момент сил $\mathbf{M}$ определяются по формулам:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

В упрощённом варианте упражнения можно получить формулы для проекции силы и модуля момента:

$$F_x = \frac{\partial(p_x E_x)}{\partial x}, \quad M = pE \sin \theta,$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$.

9. Чему равна сила взаимодействия двух точечных диполей с моментами p_1 и p_2 , которые располагаются на расстоянии r друг от друга? Рассмотрите два частных случая: а) векторы дипольных моментов лежат на одной прямой; б) векторы моментов ортогональны прямой, проходящей через центры диполей.

10. Найдите максимальное и минимальное значение силы взаимодействия двух точечных диполей (модуль дипольного момента каждого диполя равен p), находящихся на расстоянии r друг от друга.

11. Найдите дипольный момент небольшой металлической пластинки объёмом V , располагающейся перпендикулярно однородному полю с напряжённостью $\mathbf{E}$. Покажите, что если вместо пластинки рассматривается небольшое проводящее тело произвольной формы, то его дипольный момент определяется соотношением $\mathbf{p} = kV\epsilon_0\mathbf{E}$, где k — безразмерный коэффициент, зависящий только от формы тела.

12. С какой поверхностной плотностью $\sigma(\alpha)$ должен быть распределён заряд по поверхности сферы радиусом R , чтобы поле внутри сферы было равно E_0 , если α — угол между радиус-вектором точки на поверхности сферы и полем E_0 ? Покажите, что поле вне сферы будет эквивалентно полю диполя с некоторым моментом $\mathbf{p}$. Найдите значение p .

13. Металлический шар радиусом R находится в электростатическом поле, которое вдали от шара можно считать однородным с напряжённостью E_0 . Чему равен дипольный момент шара? Найдите напряжённость поля в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$ (начало в центре шара, $r > R$).

14. Шар радиусом R , изготовленный из диэлектрического материала с проницаемостью ϵ , находится в электростатическом поле, однородном на большом расстоянии от шара, напряжённость которого равна E_0 . Найдите напряжённость поля в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$.

Примечание. Сначала рассмотрите поле равномерно поляризованного шара.

Задачи

15. Металлический шарик радиусом r заряжен до потенциала U , другой такой же незаряженный шарик расположен на расстоянии x от первого. При этом выполняется условие $x \gg r$.

а) С какой силой первый шарик действует на второй?

б) Второй шарик зарядили до потенциала U . Найдите в дипольном приближении поправку к силе взаимодействия шариков, вычисленной по закону Кулона.

16. Два одинаковых проводящих шарика находятся в вакууме на достаточно большом расстоянии друг от друга. Заряды шариков равны Q и q , при этом выполняется неравенство $Q > q$, и сила взаимодействия шаров, вычисленная в дипольном приближении, равна нулю. Какой дополнительный заряд Δq можно поместить на шарик с меньшим зарядом, чтобы и в этом случае сила взаимодействия шариков была равна нулю?

17. Электрофилتر состоит из длинной металлической трубы и нити, направленной вдоль оси трубы. Между ними создаётся разность потенциалов U . По трубе пропускают воздух с пылью.

а) К какому электроду — к нити или трубе — притягиваются пылинки? Чему равна сила, действующая на пылинку с диэлектрической проницаемостью ε_2 , если сила, действующая на пылинку такого же размера, но с диэлектрической проницаемостью ε_1 , равна F_1 ? Обе пылинки одинаково удалены от нити.

б) Как зависит сила притяжения от разности потенциалов U ? А от расстояния до нити r ?

в) Во сколько раз сила, действующая на пылинку объёмом V_1 , больше силы, действующей на пылинку объёмом V_2 ($V_2 < V_1$)? Диэлектрическая проницаемость пылинок одинакова, они находятся на одинаковом расстоянии от нити.

Примечание. Можно считать пылинки плоскими, расположенными перпендикулярно полю, в этом случае поле в диэлектрике с проницаемостью ε уменьшается в ε раз по сравнению с полем в вакууме.

18. Тонкие диэлектрические диски радиусом R , заряды которых равны q и $-q$ и распределены по дискам равномерно, располагаются соосно, параллельно друг другу, образуя конденсатор с расстоянием d ($d \ll R$) между обкладками. На оси конденсатора, на расстоянии b от его положительной пластины (вне конденсатора) находится точечный заряд q . Какая сила действует на заряд, если значение b равно: $0,01d$; R ; $100R$?

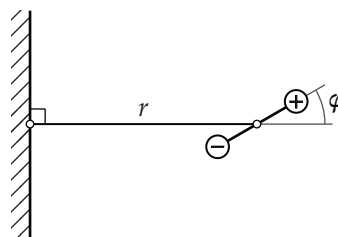
19. В электростатических полях Муха-Цокотуха умеет летать только по эквипотенциальным поверхностям. Её поместили между обкладками плоского заряженного конденсатора на расстоянии $\frac{9999}{20000}d$ от одной из них (d — расстояние между обкладками). Обкладки конденсатора имеют форму соосных дисков радиуса R , при этом $R \gg d$. Муха вначале находится на оси системы. На каком расстоянии r от конденсатора Муха пересечёт ось симметрии в процессе полёта?

20. В некоторой области пространства располагается большое количество маленьких проводящих шариков радиусом r , концентрация которых равна n . При этом среднее расстояние между шариками значительно больше r . Определите диэлектрическую проницаемость этой области пространства.

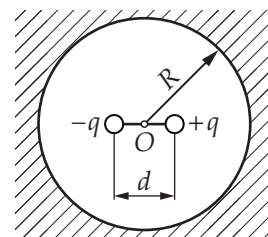
Указание. Диэлектрическая проницаемость вещества ε равна $\varepsilon = 1 + \beta$, где β (поляризуемость) — коэффициент пропорциональности в формуле $\mathbf{P} = \beta \varepsilon_0 \mathbf{E}$, где $\mathbf{P}$ — дипольный момент единицы объёма вещества.

21. Вблизи проводящей плоскости, на расстоянии r от неё располагается точечный диполь с моментом p (размеры диполя значительно меньше r). Вектор ди-

польного момента составляет угол φ с перпендикуляром к плоскости (см. рисунок). Найдите силу взаимодействия диполя и плоскости. Чему равен момент сил, действующих на диполь?



К задаче 21

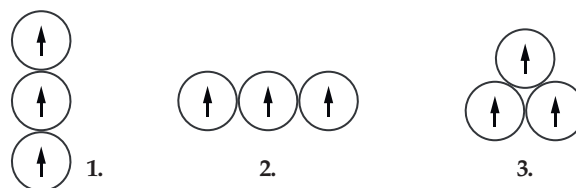


К задаче 22

22. Получите выражение для поправки к закону Кулона, учитывающей экранирование поля притягивающихся зарядов. Рассмотрите следующую модель. Два заряда q и $-q$ располагаются на расстоянии d друг от друга. Внутри шара радиусом R вакуум (см. рисунок), пространство вне шара заполнено до бесконечности проводящей средой. Центр шара, т. О, лежит посредине между зарядами. Можно считать, что $R \gg d$.

23. Точечный диполь с моментом p располагается на расстоянии r от центра проводящего незаряженного шара радиусом R ($R \ll r$). Вектор дипольного момента ортогонален радиус-вектору $\mathbf{r}$. Определите зависимость $F(r)$ силы взаимодействия диполя и шара от r .

24. Одинаковые диэлектрические шарики радиусом R во внешнем поле поляризуются, при этом дипольный момент одного шарика оказывается равен p . Определите энергию диполь-дипольного взаимодействия двух таких шариков, если их дипольные моменты сонаправлены, а вектор $\mathbf{r}$, проведённый из центра одного шара в центр другого, составляет угол θ с вектором дипольного момента $\mathbf{p}$. Для каждой из трёх конфигураций шариков, показанных на рисунке (стрелкой обозначается направление дипольного момента), найдите энергию диполь-дипольного взаимодействия. Какая конфигурация наиболее стабильная?



25. В большом однородном непроводящем шаре вдоль его диаметра, равного d , просверлен узкий канал. Шар закреплён и заряжен. Объёмная плотность заряда в любой точке шара равна ρ ($\rho > 0$). Ко входу в канал подносят диполь, образованный двумя маленькими заряженными шариками одинаковой массы, закреплёнными на концах лёгкого жёсткого непроводящего стержня, и отпускают. Через время t_d он оказывается на противоположном конце канала. Когда то же самое проделывают с одним из шариков, он пролетает канал за время t_b . Определите расстояние между зарядами диполя l , считая, что $l \ll d$. Укажите знак ближнего к шару заряда диполя в момент старта в первом случае. Можно считать, что вещество шара не поляризуется в процессе полёта шариков и диполя.

Ответы и комментарии

1. $E_A = k \frac{2qL}{x^3}$, $\varphi_A = k \frac{qL}{x^2}$; $E_B = k \frac{qL}{y^3}$, $\varphi_B = 0$; $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.
2. $\frac{\mathbf{r}}{r}$; $-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$; $-\frac{3\mathbf{r}}{r^5}$; $\mathbf{p}$.
4. $\sum q_i = 0$.
6. $E_r = \frac{p \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 r^3}$, $E_\tau = -\frac{p \sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.
9. $F_a = \frac{3p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^4}$, $F_b = \frac{3p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}$.
10. $F_{\max} = \frac{3p^2}{2\pi\epsilon_0 r^4}$, $F_{\min} = 0$.
11. $\mathbf{p} = V\epsilon_0 \mathbf{E}$.
12. $\sigma = \sigma_0 \cos \alpha$, $\sigma_0 = 3\epsilon_0 E$; $p = 3V\epsilon_0 E$.
13. $\mathbf{p} = 4\pi R^3 \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_0$; $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 + \frac{R^3}{r^3} \left(3 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{E}_0 \right)$.
14. Если $r < R$, то $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3}{\epsilon+2} \cdot \mathbf{E}_0$; если $r \geq R$, то $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot \left(3 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{E}_0 \right)$.
15. а) $8\pi\epsilon_0 \cdot \frac{U^2 r^5}{x^5}$; б) $16\pi\epsilon_0 \cdot \frac{U^2 r^5}{x^5}$.
16. $\Delta q = \frac{Q^2}{q} - q$.
17. а) Притягиваются к нити, $\frac{F_2}{F_1} = \frac{\epsilon_1(1-\epsilon_2)}{\epsilon_2(1-\epsilon_1)}$; б) $F \propto U^2$, $F \propto r^{-3}$; в) $\frac{V_1}{V_2}$.
18. $\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{d}{R}$, $\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{d}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{d}{R} \cdot 10^{-6}$.
19. $r = \frac{100R}{\sqrt{2}} \approx 71R$.
20. $\epsilon = 1 + 4\pi r^3 n$.
21. $F = \frac{3p^2(1+\cos^2 \varphi)}{32\pi\epsilon_0 r^4}$; $M = \frac{p^2}{32\pi\epsilon_0 r^3} \cdot (3 \cos^2 \varphi - \sin 2\varphi)$.
22. $\Delta F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{d}{R}$.
23. $F(r) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p^2 R}{r^5}$.
24. $W_1 = -k \frac{17p^2}{32a^3}$, $W_2 = k \frac{17p^2}{64a^3}$, $W_3 = -k \frac{3p^2}{16a^3}$, где постоянная k равна $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$; первая.
25. $l = d \cdot \left(\frac{2t_b}{\pi t_d} \right)^2$; ближний к шару заряд диполя — положительный.

Комментарии к списку литературы

При составлении задания использовались задачки [1], [2], учебники [3] и [4], статьи [5] и [6] (последняя содержит ошибки), весьма неоднозначная, но любопытная книга [7], а также архивы задач Всероссийской олимпиады школьников по физике [8] и Московской олимпиады школьников [9].

Список литературы

- [1] Задачи по физике: Учебное пособие. / И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова и др.; Под ред. О. Я. Савченко. — 3-е изд. изд. — Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1999.
- [2] Сборник задач по общему курсу физики: Учебн. пособие: Для вузов. В трех частях. / С. М. Козел, В. Г. Лейман, Г. Р. Локшин и др.; Под ред. В. А. Овчинкина. — 3-е изд., испр. и доп. изд. — М.: Физматкнига, 2004. — Т. 2. Электричество и магнетизм. Оптика.
- [3] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учебн. пособие для вузов в 5 т. — 5-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — Т. 3. Электричество.
- [4] А. С. Кингсеп, Г. Р. Локшин, О. А. Ольхов. Основы физики. Курс общей физики: Учебн. в 2 т. / Под ред. А. С. Кингсеп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика.
- [5] Черноуцан А. Проводящий шар в однородном поле // *Квант*. — 2001. — № 1. — С. 39–43.
- [6] Варламов С. Д. «Исправленный» закон Кулона // *Квант*. — 2011. — № 4. — С. 34–35.
- [7] Петров В. М. Мифы современной физики. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.
- [8] *4ipho.ru*. Сайт подготовки нац. команд РФ к Межд. ол. по физике IPhO и Межд. естественно-научной ол. юн. IJSO. — 2015. — URL: <http://www.4ipho.ru/archivy-zadach/> (дата обращения: 2022-04-15).
- [9] Архив заданий Московской олимпиады школьников по физике. — 2020. — URL: https://mos.olimpiada.ru/tasks/arch_phys (дата обращения: 2020-03-14).