

Расчёт электростатических полей и сил

Если не оговорено иное, потенциал на бесконечности принимается равным нулю. Во всех задачах распределение заряда считается фиксированным.

1. Определите зависимость напряжённости и потенциала электростатического поля на оси тонкого кольца радиуса R , равномерно заряженного по длине с линейной плотностью заряда λ , от расстояния z до центра кольца. Как изменятся ответы, если вместо кольца рассмотреть тонкий диск того же радиуса, равномерно заряженный по поверхности с поверхностной плотностью заряда σ ?

2. Докажите (не используя теорему Гаусса), что напряжённость электростатического поля в любой точке внутри сферы, равномерно заряженной по поверхности, равна нулю.

3. Прямым интегрированием определите напряжённость и потенциал электростатического поля тонкостенной сферической оболочки радиуса R , равномерно заряженной по поверхности с поверхностной плотностью σ , на расстоянии r от центра оболочки. Как изменятся ответы, если вместо сферической оболочки рассмотреть шар радиуса R , равномерно заряженный по объёму с объёмной плотностью ρ ?

4. Покажите, что составляющие напряжённости поля однородно заряженного с линейной плотностью λ отрезка даются формулами:

$$E_{\perp} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h} \cdot (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1),$$

$$E_{\parallel} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где h — расстояние от точки, в которой находится напряжённость до прямой, содержащей заряженный отрезок (см. рис. 1).

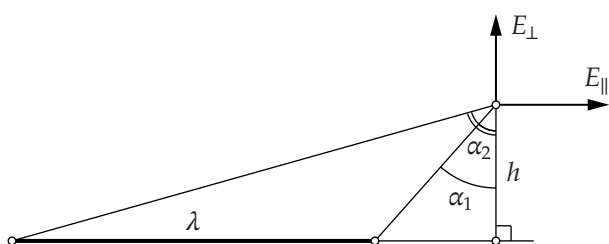


Рис. 1

5. Рассмотрим бесконечную, заряженную однородно с поверхностной плотностью σ полосу шириной L . Покажите, что в обозначениях рис. 1 компоненты напряжённости поля полосы в некоторой точке, определяются соотношениями:

$$E_{\perp} = \frac{\sigma(\alpha_2 - \alpha_1)}{2\pi\epsilon_0}, \quad E_{\parallel} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \right).$$

6. Прямым интегрированием определите напряжённость электростатического поля на расстоянии r от тонкой бесконечной прямой нити, равномерно заряженной по длине с линейной плотностью заряда λ .

7. Две параллельные полуплоскости равномерно заряжены: верхняя — с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, нижняя — с поверхностной плотностью $-\sigma$ (см. рис. 2). Найдите величину и направление вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$ в точке, расположенной на высоте h над краем полуплоскостей. Расстояние между полуплоскостями d мало по сравнению с h .

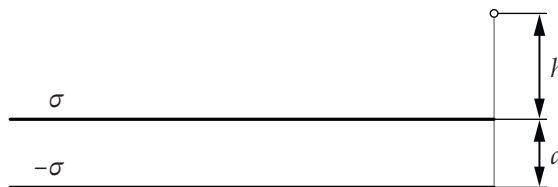


Рис. 2

8. Найдите потенциал электростатического поля на краю и в центре тонкого диска радиуса R , равномерно заряженного по поверхности с плотностью σ .

9. Определите напряжённость и потенциал электростатического поля в точках A , B и C на оси симметрии полусферы радиуса R , с равномерной поверхностной плотностью заряда σ (см. рис. 3). Точка B — центр круга, образующего основание полусферы, при этом $BC = AB = R$. Для точки A рассмотрите два случая: когда она находится на внутренней поверхности и на внешней поверхности полусферы, бесконечно близко к её границе.

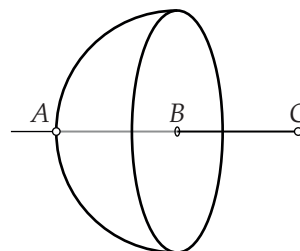


Рис. 3

10. Чему равна напряжённость электростатического поля равномерно заряженной нити AB длины l (см. рис. 4) в точке C , лежащей на прямой, являющейся продолжением нити, на расстоянии c от точки B ? Заряд единицы длины нити равен λ .

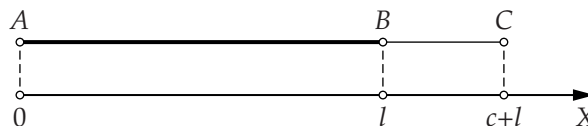


Рис. 4

11. Жёсткий стержень длины H , на концах которого закреплены маленькие шарики с зарядами q и $-q$, располагается на оси тонкостенной вертикальной цилиндрической трубки радиусом R и высотой H . На трубку нанесён заряд, поверхностная плотность которого зависит от расстояния x до плоскости нижнего основания цилиндра по закону

$$\sigma(x) = \sigma_0 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2H} \right),$$

где $\sigma_0 > 0$. Найдите направление и величину силы электростатического взаимодействия стержня с шариками

и цилиндра в положении, в котором заряды q и $-q$ находятся в центре нижнего основания и в центре верхнего основания соответственно.

12. Две бесконечные тонкие нити, заряженные однородно с одинаковой линейной плотностью заряда λ , лежат на скрещивающихся прямых, расстояние между которыми равно d . Определите силу электростатического взаимодействия нитей, если угол между скрещивающимися прямыми равен α . Решите задачу сначала для $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

13. Найдите телесные углы, под которыми бесконечно малый элемент поверхности сферы площадью dS , расположенный в точке A (см. рис. 5), виден:

а) из точки O (центра сферы);

б) из точки B , лежащей вне сферы, так что $\angle AOB = \alpha$, $\angle OBA = \beta$, $AB = b$;

в) из точки C , лежащей на поверхности сферы и на отрезке OB .

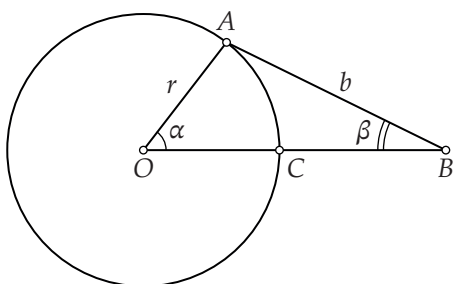


Рис. 5

14. Определите телесный угол $d\Omega$, под которым из центра сферы O видно кольцо, отсекаемое от сферы радиуса r плоскостями, расположенными на расстояниях x и $x + dx$ от её центра (см. рис. 6). Найдите также телесный угол, под которым из центра сферы виден *сферический сегмент* — часть сферы, отсекаемая от неё плоскостью, — с радиусом основания a и высотой h . Выразите этот телесный угол через угол θ между осью соответствующего конуса с вершиной в центре сферы и его образующей. Под каким телесным углом виден данный сферический сегмент из точки A , лежащей на поверхности сферы и на перпендикуляре к основанию сегмента?

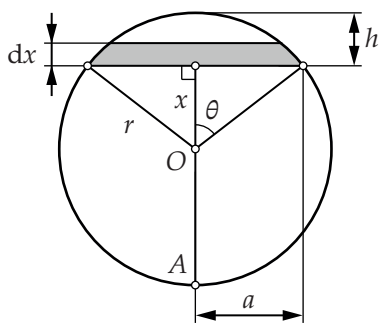


Рис. 6

15. а) Определите телесный угол, под которым диск радиусом R виден из точки, лежащей на оси диска, на расстоянии L от него.

б) Под каким телесным углом виден квадрат со стороной a из точки, лежащей на перпендикуляре к его центру на расстоянии h от него?

в) Найдите телесный угол, под которым боковая поверхность прямого кругового цилиндра длиной $2L$ с радиусом основания R ($R \ll L$) видна из точки, лежащей на оси цилиндра на расстоянии x от его центра.

16. Используя формулу для нормальной составляющей напряжённости электрического поля однородно заряженной плоской площадки

$$E_{\perp} = \frac{\sigma \Omega}{4\pi\epsilon_0},$$

где Ω — телесный угол, под которым площадка видна из точки пространства, в которой определяется напряжённость поля, а σ — поверхностная плотность заряда, найдите напряжённость электрического поля:

а) бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ ;

б) в центре куба, у которого пять граней равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда σ , а одна грань не несёт заряда;

в) в вершине конуса с углом при вершине α и высотой h , равномерно заряженного с объёмной плотностью заряда ρ .

17. Над равномерно заряженным квадратом со стороной d и полным зарядом Q на расстоянии $\frac{d}{2}$ от его центра помещён точечный заряд q . Найдите силу их взаимодействия.

18. Через центр закреплённого куба (точка O , см. рис. 7) со стороной a , равномерно заряженного по объёму с плотностью заряда ρ , проходит узкий прямолинейный канал EF , при этом точки E и F лежат в плоскости нижней и верхней грани куба соответственно. Длина канала равна L . В канале находится частица массой m и зарядом q . Найдите период малых колебаний частицы вблизи центра. Гравитационным взаимодействием и любыми видами трения следует пренебречь. Заряды куба и частицы — разноимённые.

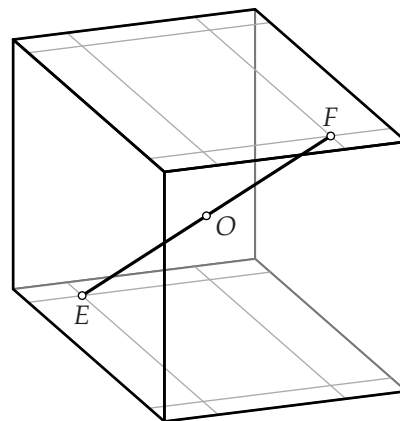


Рис. 7

19. В равномерно заряженной бесконечной пластине вырезали сферическую полость так, как показано на рис. 8. Толщина пластины равна h , объёмная плотность заряда ρ . Чему равна напряжённость электростатического поля

в точках A и B ? Найдите зависимость напряжённости поля вдоль прямой OA от расстояния x до точки O .

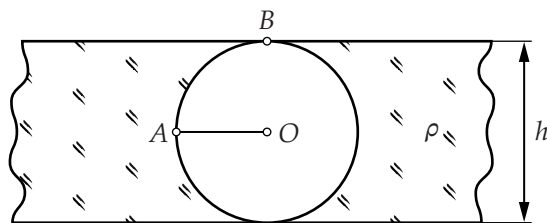


Рис. 8

20. В равномерно заряженном шаре радиуса R вырезали сферическую полость радиуса r , центр которой находится на расстоянии l от центра шара (см. рис. 9). Объёмная плотность заряда шара равна ρ . Покажите, что электростатическое поле в полости однородно. Найдите напряжённость электростатического поля вдоль прямой, проходящей через центр полости и центр шара.

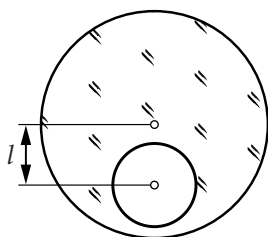


Рис. 9

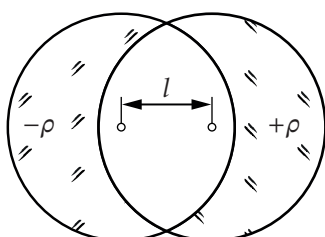


Рис. 10

21. При пересечении двух шаров радиуса R , центры которых находятся на расстоянии l друг от друга, образуются два «полумесяца», равномерно заряженные разноимёнными электрическими зарядами (см. рис. 10). Объёмная плотность электрического заряда слева $-\rho$, а справа ρ . Докажите, что электрическое поле в области пересечения шаров однородно. Найдите напряжённость этого поля.

Используя полученные результаты и применяя метод предельного перехода: $l \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$, $\rho l = \text{const}$, найдите распределение заряда на сфере радиуса R , которое даст внутри сферы однородное электростатическое поле напряжённости E . Как связана с напряжённостью поля максимальная поверхностная плотность заряда?

22. Два одинаковых диска радиусом R расположены соосно параллельно друг другу на небольшом расстоянии $2d$ ($d \ll R$). Поверхностная плотность заряда одного диска равна σ , а другого равна $-\sigma$. Ось OX системы координат совпадает с осью дисков и направлена от отрицательно заряженного диска к положительному. Начало координат располагается посередине между дисками. Считая, что потенциал бесконечно удалённой точки равен нулю определите зависимость $\varphi(x)$ для следующих значений x : $|x| < d$; $|x| \gg R$. Изобразите качественный график зависимости $\varphi(x)$.

23. Три одинаковых тонких диска радиусом R , однородно заряженных с поверхностной плотностью σ , 2σ и -3σ , расположены так, что ось OX является общей осью этих дисков, при этом центры дисков находятся в точках с координатами 0 , d и $2d$, где $d = 1000R$. Потенциал в центре уединённого диска, заряженного однородно с поверхност-

ной плотностью σ , равен $1000V$. Изобразите график зависимости потенциала φ электростатического поля дисков в точках, лежащих на оси OX , от безразмерной координаты $a = \frac{x}{d}$ для значений a , принадлежащих отрезку $[0; 2]$.

24. Рассмотрим отрезок длины l равномерно заряженный с линейной плотностью λ .

а) Покажите, что напряжённость поля отрезка совпадает с напряжённостью поля дуги окружности с центром в точке наблюдения, при этом радиус окружности равен расстоянию от точки наблюдения до отрезка, а линейная плотность заряда дуги такая же как у отрезка. Убедитесь в том, что вектор напряжённости поля отрезка направлен вдоль биссектрисы угла, под которым отрезок виден из точки наблюдения.

б) Покажите, что эквипотенциальные поверхности отрезка – это эллипсоиды вращения с фокусами в концах отрезка.

в) Покажите, что линии напряжённости электростатического поля, создаваемые отрезком образуют гиперболы с фокусами в концах отрезка.

25. Зависимость потенциала некоторого поля, создаваемого системой металлических электродов (в области поля отсутствуют точечные или объёмно распределённые заряды) даётся формулой

$$\varphi(x, y, z) = \frac{U_0}{2r_0^2} (-a(x^2 + y^2) + bz^2),$$

где U_0 и r_0 — известные постоянные, a и b — неизвестные безразмерные константы, причём $a > 0$. Получите формулы для проекций E_x , E_y и E_z вектора напряжённости электрического поля на оси системы координат и найдите отношение $\frac{b}{a}$ безразмерных коэффициентов b и a в выражении для потенциала. Изобразите картину линий поля в плоскости $z = \text{const}$.

Ответы

$$1. E(z) = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}, \varphi(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}};$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right\}, \varphi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \sqrt{R^2 + z^2} - z \right\}.$$

$$3. E(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < r < R, \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R}{\epsilon_0} & \text{при } 0 < r < R, \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{при } 0 < r < R, \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) & \text{при } 0 < r < R, \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

$$6. E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

$$7. E = \frac{\sigma d}{2\pi\epsilon_0 h}.$$

$$8. \varphi_C = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0}, \varphi_O = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}.$$

$$9. E_B = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}, E_A = E_C = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right\};$$

векторы $\vec{E}_A, \vec{E}_B$ и $\vec{E}_C$ сонаправлены с вектором $\vec{AB}$, если точка A лежит на внутренней поверхности полусферы. Если же A лежит на внешней поверхности полусферы, то $E_A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$, и вектор направлен противоположно $\vec{AB}$.

$$\varphi_A = \frac{\sqrt{2}\sigma R}{2\epsilon_0}, \varphi_B = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}, \varphi_C = \frac{(2-\sqrt{2})\sigma R}{2\epsilon_0}.$$

$$10. E_C = \frac{q\lambda l}{4\pi\epsilon_0(l+c)c}.$$

$$11. \text{Сила направлена вниз и равна } F = \frac{\sigma q}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right\}.$$

$$12. F = \frac{\lambda^2}{2\epsilon_0} \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{2}; F = \frac{\lambda^2}{2\epsilon_0 \sin \alpha} \text{ при произвольном } \alpha.$$

$$13. \text{а) } d\Omega_O = \frac{dS}{r^2}; \text{б) } d\Omega_B = -\frac{dS \cos(\alpha+\beta)}{b^2}; \text{в) } d\Omega_C = \frac{dS}{4r^2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$14. d\Omega_O = \frac{2\pi}{r} dx \text{ для кольца; } \Omega_O = \frac{2\pi h}{r} = 2\pi(1 - \cos \theta) \text{ для сегмента; } \Omega_A = \frac{2\pi h}{r} = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right).$$

$$15. \text{а) } \Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 2\pi \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right), \text{ где } \alpha \text{ — угол между осью соответствующего конуса и его образующей;}$$

$$\text{б) } \Omega = 4\pi \arctg \left(\frac{a^2}{4h\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}} \right), \text{ придётся интегрировать; в) } \Omega \approx 4\pi \left(1 - \frac{R^2}{4L^2} - \frac{x^2 R^2}{4L^2} \right).$$

$$16. \text{а) } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \text{ б) } E = \frac{\sigma}{6\epsilon_0}. \text{ в) } E = \frac{\rho h(1 - \cos \alpha)}{2\epsilon_0}.$$

$$17. F = \frac{Qq}{6\epsilon_0 d^2}.$$

$$18. T = 2\pi \sqrt{\frac{3m\epsilon_0}{Q(-\rho)}}.$$

$$19. E_A = \frac{\rho h}{6\epsilon_0}, E_B = \frac{\rho h}{3\epsilon_0}, E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

21. В любой точке внутри полости напряжённость электрического поля направлена вдоль прямой, соединяющей центры шара и полости, и по модулю равна

$$E = \frac{\rho l}{3\epsilon_0}.$$

Вне полости напряжённость поля вдоль оси, соединяющей центры, имеет вид

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(x + \frac{r^3}{(l-x)^2} \right), & \text{при } 0 < x < l-r, \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(x - \frac{r^3}{(x-l)^2} \right), & \text{при } l+r < x < R, \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{x^2} - \frac{r^3}{(x-l)^2} \right), & \text{при } x > R. \end{cases}$$

$$22. \varphi(x) = \frac{\sigma x}{\epsilon_0}; \varphi(x) = \frac{\sigma R^2 d}{2\epsilon_0 x^2}.$$

23. График изображён на рис. 11.

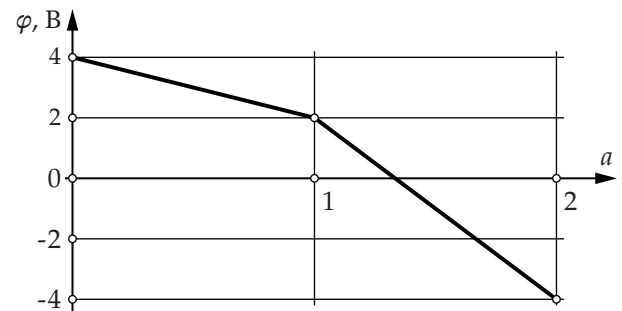


Рис. 11

$$25. E_x = \frac{aU_0 x}{r_0^2}, E_y = \frac{aU_0 y}{r_0^2}, E_z = -\frac{bU_0 z}{r_0^2}; \frac{b}{a} = 2.$$