

Надо уметь выводить

Электродинамика

1. Составляющая поля однородно заряженного отрезка (λ — линейная плотность заряда, h — расстояние до прямой, на которой лежит отрезок), перпендикулярная отрезку:

$$E_{\perp} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h} \cdot (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

Напряжённость поля бесконечной однородно заряженной нити:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Нормальная и тангенциальная составляющие поля однородно заряженной по поверхности полосы:

$$E_n = \frac{\sigma(\beta_2 - \beta_1)}{2\pi\epsilon_0}, \quad E_{\tau} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2} \right).$$

2. Определение ориентированного телесного угла и элементарный поток поля точечного заряда:

$$d\Omega = \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3}, \quad d\Phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Теорема Гаусса в интегральной форме (интегрирование элементарного потока по произвольной замкнутой поверхности Σ):

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{вн}}}{\epsilon_0}.$$

3. Нормальная компонента вектора напряжённости поля однородно заряженной плоской площадки:

$$E_n = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \Omega.$$

Напряжённость на оси однородно заряженного диска радиусом R :

$$E(x) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \Omega(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right).$$

Нормальная компонента силы, действующей на однородно заряженную площадку:

$$dF_n = \sigma \cdot d\Phi.$$

Сила, действующая на однородно заряженную полусферу со стороны точечного заряда, помещённого в её центр:

$$F = q \cdot E_{\text{псф}} = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot d\Omega = \frac{q\sigma}{4\epsilon_0}.$$

4. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

Поле однородно заряженной плоской пластины толщиной $2d$:

$$E_x(x) = \begin{cases} \frac{\rho x}{\epsilon_0}, & \text{при } |x| < d; \\ \frac{\rho d}{\epsilon_0} \cdot \text{sgn} \left(\frac{x}{d} \right), & \text{при } |x| \geq d. \end{cases}$$

Поле однородно заряженного по объёму шара радиусом R :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}, & \text{при } r < R; \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}, & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

5. Потенциал поля точечного заряда:

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Потенциал поля однородно заряженного шара:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}, & \text{при } r < R; \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}, & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

6. Потенциал поля точечного заряда:

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Потенциал однородно заряженной пластины толщины h ($\varphi = 0$ в центре):

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0}, & |x| < \frac{h}{2}, \\ -\frac{\rho h}{2\epsilon_0} \left(|x| - \frac{h}{4} \right), & |x| \geq \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Потенциал однородно заряженного шара:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}, & r < R, \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}, & r \geq R. \end{cases}$$

7. Потенциал и напряжённость поля точечного диполя.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Вектор напряжённости:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right)$$

Радиальная и тангенциальная компоненты напряжённости:

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_{\theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

8. Сила, действующая на точечный диполь в неоднородном поле.

$$F_x = p_x \frac{dE_x}{dx}, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}.$$

Момент сил, действующих на диполь во внешнем поле.

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

Потенциальная энергия жёсткого диполя во внешнем поле.

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

9. Нормальная и тангенциальная компоненты вектора напряжённости вблизи поверхности проводника:

$$E_n = \sigma \varepsilon_0, \quad E_\tau = 0.$$

Проводящий шар радиусом R в однородном поле напряжённостью $\mathbf{E}_0$, распределение поверхностной плотности заряда:

$$\sigma(\theta) = 3E_0\varepsilon_0 \cos \theta,$$

дипольный момент шара

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0,$$

Поле вне шара:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 + \frac{3R^3}{r^5}(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \frac{R^3}{r^3}\mathbf{r}.$$

10. Изображение точечного заряда q в заземлённой сфере радиусом R :

$$q' = -q \frac{R}{r}, \quad x = \frac{R^2}{r},$$

где r — расстояние от центра сферы до заряда q , x — расстояние от центра сферы до заряда-изображения q' . Сила взаимодействия точечного заряда q с проводящей плоскостью (h — расстояние до плоскости):

$$F = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2}.$$

11. Энергия электростатического взаимодействия системы N точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Энергия системы проводников:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i.$$

Энергия проводящего шара радиусом R с зарядом q :

$$W = \frac{q\varphi(R)}{2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Давление на границе проводника:

$$P = \frac{\sigma E}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2},$$

где E — напряжённость в точке на границе, в которой определяется давление.

12. Рассмотрим следующую задачу. Металлический шарик заряжают до заряда Q , далее подносят к удалённому проводящему телу и касаются его. При первом касании (перед которым тело было не заряжено) на него переходит

заряд q . До какого заряда можно зарядить тело, многократно повторив цикл зарядки? Ответ:

$$q_{\max} = \frac{Qq}{Q - q}.$$

13. Теорема Гаусса для материальных сред:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{св}}.$$

Граничные условия для векторов напряжённости и электрической индукции:

$$E_\tau^{(1)} = E_\tau^{(2)}, \quad D_n^{(1)} = D_n^{(2)}.$$

Преломление силовых линий на границе раздела двух диэлектриков:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

14. Ёмкость плоского и сферического конденсаторов:

$$C = \frac{S\varepsilon\varepsilon_0}{d}, \quad C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Последовательное соединение конденсаторов. Формулы для последовательного соединения N конденсаторов:

$$q_i = q_{\text{общ}}, \quad U_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^N U_i, \quad \frac{1}{C_{\text{общ}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}.$$

Параллельное соединение конденсаторов. Формулы для параллельного соединения N конденсаторов:

$$q_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^N q_i, \quad U_i = U_{\text{общ}}, \quad C_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^N C_i.$$

Энергия поля, локализованного в конденсаторе:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

15. Плотность энергии в вакууме и в диэлектрических средах (вывод на основе рассмотрения плоского конденсатора):

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Сила, действующая на диэлектрическую пластину в конденсаторе при $q = \text{const}$:

$$F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{q^2}{2C^2(y)} \cdot \frac{\partial C}{\partial y},$$

Сила, действующая на диэлектрическую пластину в конденсаторе, присоединённом к идеальному источнику с ЭДС $\mathcal{E}$:

$$F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} + \mathcal{E} \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\mathcal{E}^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial y} - 2 \frac{\partial C}{\partial y} \right) = \frac{\mathcal{E}^2}{2} \cdot \frac{\partial C}{\partial y}.$$

Связь давления на границе раздела диэлектриков и плотности энергии (на основе предыдущего результата):

$$P = |w_2 - w_1|.$$

16. Закон сохранения электрического заряда:

$$\frac{dq}{dt} + \oint_{\sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Преломление линий тока на границе раздела сред с разной проводимостью:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Связь сопротивления слабопроводящей среды между двумя проводниками и ёмкости:

$$R = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{C \lambda}.$$

17. Переходные процессы в линейной RC-цепи. Зарядка конденсатора:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{U}{\tau} = \frac{\mathcal{E}}{\tau}, \quad \tau = RC.$$

Зависимость напряжения на конденсаторе от времени при зарядке/разрядке:

$$U(t) = \mathcal{E} (1 - e^{-t/\tau}), \quad U(t) = U_0 e^{-t/\tau}.$$

Энергетический баланс при зарядке от идеального источника:

$$A_{\mathcal{E}} = C \mathcal{E}^2, \quad W_C = \frac{C \mathcal{E}^2}{2}, \quad Q = \frac{C \mathcal{E}^2}{2}.$$

18. Микроскопическая теория тока. Модель Друде. Стационарная дрейфовая скорость и подвижность носителей:

$$\mathbf{u} = -\frac{e\tau}{m_e} \mathbf{E}, \quad b = \frac{e\tau}{m_e}.$$

Плотность тока и локальный закон Ома:

$$\mathbf{J} = -en\mathbf{u} = \lambda \mathbf{E}, \quad \lambda = \frac{ne^2\tau}{m_e}.$$

Удельная мощность джоулева нагрева:

$$w_{\text{дж}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \lambda E^2.$$

19. Уравнение Ван-дер-Ваальса и критические параметры. Уравнение состояния для ν молей газа:

$$\left(P + \frac{av^2}{V^2}\right)(V - bv) = \nu RT.$$

Критическая точка определяется условиями $\frac{\partial P}{\partial V} = 0$ и $\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0$. Критические параметры:

$$V_{\text{кр}} = 3bv, \quad P_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}, \quad T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb}.$$

20. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(v_2 - v_1)}.$$

Геометрия фазовой диаграммы воды вблизи тройной точки. Тангенс угла наклона кривой плавления к оси температуры:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{пл}} = \frac{L_{\text{пл}}}{T_{\text{тр}}(v_{\text{ж}} - v_{\text{тв}})} \approx -1,36 \cdot 10^7 \text{ Па/К}.$$

Тангенс угла наклона кривой испарения к оси температуры (с учётом $v_{\text{пар}} \gg v_{\text{ж}}$):

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{исп}} = \frac{L_{\text{исп}}}{T_{\text{тр}} v_{\text{пар}}} \approx \frac{\mu L_{\text{исп}} P_{\text{тр}}}{RT_{\text{тр}}^2} \approx 44,4 \text{ Па/К}.$$

21. Приближённая зависимость давления насыщенного пара от температуры ($v_{\text{пар}} \gg v_{\text{ж}}$, идеальный газ):

$$P(T) \approx P_0 \exp \left[\frac{L\mu}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right].$$

Теплоёмкость насыщенного пара (считается $\frac{dL}{dT} = 0$):

$$c = \frac{c_P}{\mu} - \frac{L}{T}.$$

22. Оценка относительного количества воды $\frac{m}{M}$, выбрасываемой гейзером при извержении. Давление на глубине h и температура кипения $T(h)$:

$$P(h) = P_0 \left(1 + \frac{h}{h_0} \right), \quad T(h) = \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{\mu L} \ln \left(1 + \frac{h}{h_0} \right)}.$$

Доля выброшенной воды:

$$\frac{m}{M} = \frac{c(T(h) - T_0)}{L}.$$

23. Уравнение непрерывности (одномерный и трёхмерный случаи):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Уравнение Эйлера (одномерный и трёхмерный случаи):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla P.$$