

Теорема Гаусса для диэлектриков

Пусть имеется некоторая замкнутая область Ω внутри диэлектрика. Пока диэлектрик не поляризован, суммарный заряд внутри области равен нулю. При поляризации связанные заряды перераспределяются, и каждый элемент объёма приобретает дипольный момент, характеризующийся вектором поляризации $\mathbf{P}$.

Рассмотрим небольшую площадку dS на границе области Ω . Представим поляризацию вблизи этой площадки как коллективное смещение положительных зарядов относительно отрицательных на расстояние, задаваемое вектором $\mathbf{l}$. Смещение зарядов молекул вблизи площадки создаёт диполи с моментом $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ или же, в случае полярного диэлектрика, дипольные моменты молекул ориентируются вдоль вектора поляризации $\mathbf{P}$. Отрицательные заряды остаются внутри области Ω , а положительные выходят за её пределы.

Через площадку dS «перешагнут» только те положительные заряды молекул, которые первоначально находились в воображаемом косом цилиндре с основанием dS и образующей $\mathbf{l}$. Объём этого цилиндра равен $dV = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{S}$. Если n — концентрация молекул, то суммарный заряд, прошедший через площадку dS , равен

$$nq\mathbf{l} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S},$$

поскольку вектор поляризации равен объёмной плотности дипольного момента: $\mathbf{P} = nq\mathbf{l}$. Таким образом, в результате поляризации вещества вблизи площадки dS заряд области Ω изменяется на величину

$$dQ_{\text{связ}} = -\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}.$$

Знак минус показывает, что при положительной нормальной составляющей $\mathbf{P}$ положительный связанный заряд выходит из области Ω . Если рассмотреть всю границу $\partial\Omega$, то получим, что при поляризации через неё внутрь области проходит заряд

$$Q_{\text{связ}} = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1)$$

Теперь предположим, что внутри области заключён также и свободный заряд Q . Тогда по теореме Гаусса для потока напряжённости электрического поля через поверхность $\partial\Omega$ имеем

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot (Q_{\text{связ}} + Q).$$

После незначительных преобразований после подстановки выражения (1) отсюда следует

$$\varepsilon_0 \oint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} + Q.$$

Введём вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, который объединяет вклад электрического поля и поляризации вещества. Тогда из последней формулы следует теорема Гаусса для диэлектриков:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad (2)$$

Иначе говоря, поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен свободному заряду, заключённому внутри неё. Поэтому вектор $\mathbf{D}$ удобно использовать при описании электрического поля в диэлектриках.

Обсудим теперь равенство $\sigma = P_n$, задающее поверхностную плотность поляризационного заряда на границе диэлектрика. Если в некоторой точке границы вектор поляризации равен $\mathbf{P}$, то это означает, что диполи, изображающие поляризованные молекулы, ориентированы так, что векторы их дипольных моментов сонаправлены $\mathbf{P}$. Заряд малой площадки dS , лежащей на поверхности, равен $dq_{\text{пол}} = nqdV$, где dV — объём косого цилиндра с основанием dS и образующей $\mathbf{l}$.

Высота этого цилиндра равна $h = l \cos \theta$, где θ — угол между вектором смещения зарядов $\mathbf{l}$ и внешней нормалью $\mathbf{n}$. Тогда объём цилиндра равен $dV = dS \cdot l \cos \theta$. Суммарный связанный заряд, вышедший на поверхность, определяется как

$$dq_{\text{пол}} = qndV = qnl \cos \theta dS.$$

Учитывая, что $\mathbf{P} = nq\mathbf{l}$, а $P_n = P \cos \theta$, получаем

$$dq_{\text{пол}} = P_n dS \Rightarrow \sigma_{\text{пол}} = \frac{dq_{\text{пол}}}{dS} = P_n.$$

Знак заряда определяется направлением вектора $\mathbf{P}$: если он направлен из диэлектрика наружу ($\theta < \pi/2$), на поверхности возникает положительный поляризационный заряд. Таким образом, нормальная составляющая вектора поляризации непосредственно задаёт поверхностную плотность связанного заряда.

Граничные условия для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$

Рассмотрим границу раздела двух диэлектриков. Пусть на границе может находиться свободный поверхностный заряд с плотностью σ .

Найдём условия, которым должны удовлетворять электрические поля по разные стороны границы.

Сначала рассмотрим нормальные составляющие вектора электрической индукции. Выберем малую цилиндрическую поверхность, ось которой направлена по нормали к границе, а основания расположены по разные стороны поверхности раздела. Высоту цилиндра будем считать бесконечно малой.

Применяя теорему Гаусса для вектора $\mathbf{D}$ к этой поверхности, получаем

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{своб}}.$$

В пределе, когда высота цилиндра стремится к нулю, вклад боковой поверхности исчезает, и остаются только потоки через основания. Тогда

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{\text{своб}}. \quad (3)$$

Таким образом, нормальная составляющая вектора электрической индукции испытывает скачок, равный поверхностной плотности свободного заряда.

Теперь найдём условие для касательной составляющей напряжённости электрического поля. Рассмотрим прямоугольный контур, пересекающий границу раздела. Две

его стороны параллельны границе, высоту контура будем считать бесконечно малой.

Поскольку в электростатике электрическое поле потенциально (в общем случае это не так), циркуляция его по любому контуру (в частности по выбранному прямоугольному контуру) равна нулю:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

С другой стороны, циркуляция может быть выражена через длину стороны l рассматриваемого прямоугольника:

$$E_{1\tau} \cdot l - E_{2\tau} \cdot l = 0.$$

циркуляцией по двум другим сторонам можно пренебречь ввиду их малости. Таким образом, граничное условие для составляющих вектора напряжённости:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (4)$$

Другими словами, касательная составляющая напряжённости электрического поля непрерывна на границе раздела сред.

Если обе среды являются линейными диэлектриками, то $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$, и из полученных условий следует равенство

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

В частности, если свободный заряд на границе отсутствует ($\sigma = 0$), то $D_{1n} = D_{2n}$.

Рассмотрим также границу диэлектрика с проводником. Внутри проводника электрическое поле равно нулю, поэтому на его поверхности $E_\tau = 0$, то есть поле у поверхности проводника направлено по нормали. Кроме того, $D_n = \sigma$, где σ — поверхностная плотность свободного заряда проводника.