

Гармоническое движение

Везде, где потребуется, следующие константы считаются известными: гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$, ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

1. Гармонический закон изменения колеблющейся величины имеет вид:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Выразите амплитуду A и начальную фазу φ через начальные значения $x_0 = x(0)$ и $v_0 = \dot{x}(0)$. Изобразите фазовую диаграмму движения — траекторию на плоскости $(x, \frac{\dot{x}}{\omega})$.

Груз покоится на чашке пружинных весов, при этом в сжатой пружине запасена потенциальная энергия деформации U_0 . На чашку весов поставили дополнительную гирю так, что масса нового груза стала в три раза больше первоначальной. Во сколько раз величина максимального ускорения $a_{\max}$ в процессе возникших колебаний отличается от ускорения свободного падения g ? Каков модуль ускорения груза в момент, когда его кинетическая энергия равна $3U_0$? Отметьте отвечающие этому моменту точки на фазовой диаграмме. Затуханием колебаний и массой чашки можно пренебречь. Решите задачу двумя способами.

2. Груз подвешен к потолку на пружине и вначале покоится на подставке, действуя на неё с силой $P = \alpha P_0$, где P_0 — вес того же груза в отсутствие пружины, $\alpha > 0$. В начальный момент времени подставку убирают, и груз начинает двигаться. В момент времени t_0 его ускорение впервые обращается в нуль. Определите наибольшее и наименьшее значения модуля силы упругости пружины при движении груза, а также максимальное расстояние, на которое груз удаляется от начального положения.

3. (Маятник у стены и с гвоздём) Углы отклонения от вертикали в обеих частях задачи считайте малыми.

а) Точка подвеса математического маятника длиной L закреплена на гладкой неподвижной стене, образующей с вертикалью малый угол β . В положении равновесия нить вертикальна, а шарик стены не касается. При движении шарика в сторону стены он ударяется о неё в тот момент, когда угол отклонения нити от вертикали становится равным β . Удар считайте мгновенным и абсолютно упругим. Маятник отклоняют от вертикали на угол 2β в сторону от стены и отпускают без начальной скорости. Найдите период колебаний маятника.

б) Математический маятник длиной L подвешен к потолку. На расстоянии h ниже точки подвеса ($0 < h < L$) вплотную к вертикальной нити вбит тонкий

гвоздь. Маятник отклоняют от вертикали на угол θ_1 в сторону от гвоздя и отпускают без начальной скорости. Найдите период колебаний.

Изобразите фазовые траектории обеих систем в координатах $\left(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)$, где θ — угол между вертикалью и участком нити, непосредственно соединённым с шариком, а $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

4. (Банджи-джампинг) Прыгун привязан к концу длинного упругого жгута, другой конец которого прикреплён к высокому мосту. Прыгун делает шаг с моста и падает вниз, к реке, с нулевой начальной скоростью; в самой нижней точке он не достигает воды. Масса прыгуна равна m , длина нерастянутого жгута — L , его жёсткость — k . Прыгуна считайте материальной точкой, а массу жгута и сопротивление воздуха на всём протяжении полёта — пренебрежимо малыми.

Пусть ось Oy направлена вертикально вниз, а начало отсчёта находится на уровне моста. Найдите координату y_1 прыгуна в момент его первой остановки и время движения до этого момента. Определите максимальную скорость прыгуна $v_{\max}$. Изобразите фазовую траекторию движения до первой остановки в координатах $\left(y, \frac{\dot{y}}{\omega}\right)$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

5. (Груз на нелинейном шнуре) Энергия упругой деформации резинового шнура длины $L_0 = 0,5$ м задаётся формулой

$$W(x) = \frac{4ka^2}{3} \left[\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{3/2} - 1 - \frac{3x}{2a} \right],$$

где $k = 24$ Н/м, $a = 0,12$ м. Сама формула справедлива при $x \lesssim L_0$. Массой шнура и его гистерезисом (различием кривых нагружения и разгрузки) можно пренебречь.

Верхний конец шнура закреплён на потолке, к нижнему присоединён груз массой M . Вначале шнур вертикален, не провисает, но и не деформирован, а груз удерживают внешней силой; затем груз отпускают. Найдите максимальное удлинение шнура $x_{\max}$, равновесное удлинение x_0 и период T малых вертикальных колебаний груза вблизи положения равновесия. Вычислите эти величины для $M = 0,1$ кг и $M = 0,3$ кг и сравните с ответами для пружины жёсткости k , подчиняющейся закону Гука.

6. (Удар по гантели) Два тела массами m_1 и m_2 покоятся на гладкой горизонтальной поверхности и связаны лёгкой пружиной жёсткостью k , которая изначально не деформирована. Тела можно считать материальными точками, способными двигаться только вдоль оси пружины. В начальный момент времени телу массой m_1 ударом сообщают скорость v , направленную в сторону от второго тела. Найдите зависимости скоростей тел от времени.

7. (Падение гантели) Маленький груз массой m_1 подвешен к потолку на верёвке, длиной которой можно пренебречь. К этому грузу на лёгкой упругой пружине прикреплен второй небольшой груз массой m_2 , покоящийся на расстоянии L от потолка. В момент времени $t = 0$ верёвку обрезают, и грузы начинают падать. Длина недеформированной пружины равна L_0 . Пусть ось Ox направлена вертикально вниз, а её начало O совпадает с точкой подвеса верхнего груза. Считая, что до обрезания верёвки второй груз покоился в равновесии, найдите зависимости координат грузов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ от времени.

8. (Груз на пружине в коробке) На гладком горизонтальном столе стоит коробка массой $M = 200$ г. Внутри неё лежит груз массой $m = 50$ г, соединённый пружиной жёсткостью $k = 400$ Н/м с одной из вертикальных стенок коробки (см. рис. 1). По дну коробки груз скользит без трения. Изначально пружина не деформирована, а расстояние от груза до противоположной стенки равно $d_0 = 1$ см, причём длина недеформированной пружины значительно больше d_0 .

В начальный момент времени коробке ударом сообщают скорость v_0 , направленную горизонтально вдоль пружины в сторону той стенки, к которой пружина прикреплена. Столкновение груза со стенкой коробки, если оно вообще происходит, считайте мгновенным и абсолютно упругим. Определите модуль максимальной деформации пружины $|\Delta l|_{\max}$ и момент времени t_1 , когда он впервые достигается, для двух значений начальной скорости: $v_0 = 0,5$ м/с и $v_0 = 2$ м/с.

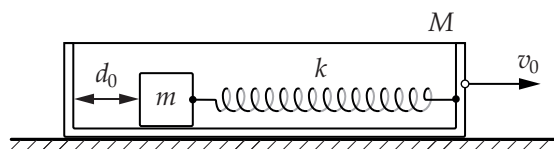


Рис. 1

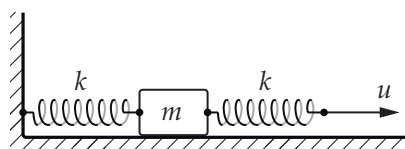


Рис. 2

9. (Груз между двумя пружинами) На гладком горизонтальном столе лежит груз массой m , к которому прикреплены две одинаковые пружины жёсткостью k каждая (см. рис. 2). Левый конец левой пружины закреплён на стене.

В момент времени $t = 0$ правый конец правой пружины начинают перемещать с постоянной скоростью u . Через какое время t_1 груз впервые приобретёт скорость u ? На каком расстоянии l_1 от первоначального положения он будет находиться в этот момент? Какую работу A совершит за время t_1 внешняя сила, приложенная к правой пружине? Изобразите фазовую диаграмму движения груза в неподвижной системе отсчёта, в координатах $(x, \frac{\dot{x}}{\omega})$, где $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$. Начальную координату считайте нулевой.

10. (Пружинный маятник с трением) Пружинный маятник представляет собой небольшой кубик, который лежит на горизонтальном шероховатом столе

и соединён лёгкой пружиной с вертикальной стеной. Коэффициенты трения покоя и скольжения кубика о стол можно считать одинаковыми и равными $\mu = 0,15$. Кубик выводят из положения равновесия, растягивая пружину на $x_{\text{нач}} = 3$ см, и отпускают. Известно, что если тот же кубик подвесить на этой пружине к потолку, то после затухания колебаний деформация пружины окажется равной $x_0 = 2$ см.

Какой путь пройдёт кубик до остановки и сколько времени он будет двигаться? Изобразите также фазовую диаграмму движения кубика в координатах $(x, \frac{\dot{x}}{\omega})$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Начало отсчёта совпадает с положением груза, при котором пружина не деформирована.

11. (Доска на вращающихся барабанах) На два быстро вращающихся навстречу друг другу барабана кладут тонкую однородную доску массой m и длиной $2L$ (см. рис. 3). Расстояние между осями барабанов равно $2b$, прямая, соединяющая оси, наклонена к горизонту под углом α , коэффициент трения скольжения доски о барабаны равен μ . В начальный момент времени доска покоится, а её центр расположен симметрично относительно барабанов. Считайте, что ни в какой момент доска не теряет контакта с обоими барабанами.

Найдите закон движения центра доски. При каком соотношении между α и μ найденный закон движения реализуется?

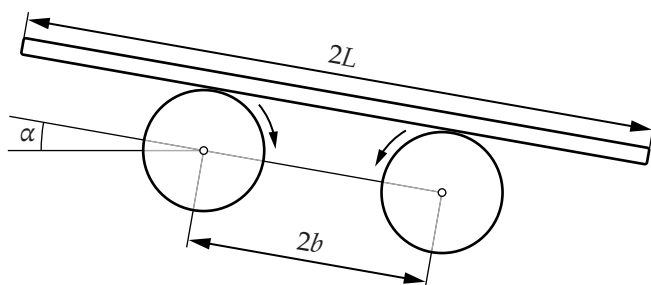


Рис. 3

12. (Галактика с линейным тяготением) В безбрежных пространствах космоса обнаружена галактика X , в которой силы взаимодействия между телами не подчиняются закону всемирного тяготения: любые два точечных тела притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам m_1 и m_2 и расстоянию r между ними,

$$F = \alpha m_1 m_2 r.$$

Астрономам удалось определить полную массу галактики $M = 10^{40}$ кг и коэффициент пропорциональности $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-59} \frac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{кг}^2}$. В момент открытия её масса была распределена произвольно и несимметрично, а тела не двигались друг

относительно друга. Определите, через какое время τ после момента открытия произойдёт коллапс галактики.

13. (Состав на горке) Длинный железнодорожный состав движется по инерции со скоростью $v_0 = 6$ м/с по горизонтальным рельсам, а затем въезжает на горку с постоянным углом наклона $\alpha = 4^\circ$ к горизонту. Через $T = 30$ с после въезда на горку состав остановился, не доехав до конца склона. Массу состава считайте распределённой равномерно по его длине. Трением качения и длиной переходного участка при въезде на горку можно пренебречь. Какая часть состава к моменту остановки оказалась на склоне?

14. (Верёвка в трубе) Гладкая однородная верёвка длины $l = a + b$ лежит в трубе, изогнутой под прямым углом. Одно колено трубы горизонтально, а другое вертикально. Внутренний диаметр трубы лишь незначительно превышает диаметр верёвки, так что верёвка не сминается и не скапливается у изгиба. В начальный момент часть верёвки длиной a находится в горизонтальном колене, а часть длиной b — в вертикальном; верёвку отпускают без начальной скорости. Считайте, что трение верёвки о стенки трубы отсутствует, а оба колена имеют достаточную длину.

Рассмотрите два случая: а) вертикальное колено направлено от изгиба вверх; б) вертикальное колено направлено от изгиба вниз. В каждом случае найдите зависимость от времени длины $y(t)$ участка верёвки, находящегося в вертикальном колене. Через какое время в первом случае верёвка полностью окажется в горизонтальном колене, а во втором — в вертикальном?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

15. (Бусинка на гравитирующем стержне) В глубинах Вселенной, вдали от других тяготеющих масс, находится тонкий однородный стержень длиной $L = 10$ м и массой $M = 1$ кг, по которому без трения может скользить бусинка массой $m = 0,1$ кг. Бусинка имеет конечные поперечные размеры и симметрично охватывает стержень; как размеры бусинки, так и толщина стержня малы по сравнению с L . В начальный момент бусинка немного смещена от середины стержня, а система как целое неподвижна. Через какое время τ бусинка впервые окажется в середине стержня?

16. (Брус на вращающихся валиках) На два цилиндрических валика радиусом $R = 0,5$ м, вращающихся в противоположных направлениях так, что их верхние точки движутся навстречу друг другу, положили длинный однородный брус (см. рис. 4). Расстояние между осями валиков равно $2L = 2$ м, а центр масс бруса смещён от середины между осями на αL , где $\alpha = \frac{3}{4}$. Затем брус отпустили без толчка. Коэффициент трения между брусом и валиками равен $\mu = 0,3$

и не зависит от скорости скольжения. Угловая скорость вращения валиков равна $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$.

После того как установился предельный периодический режим движения бруса, угловую скорость вращения валиков уменьшили в десять раз. Найдите циклическую частоту Ω и амплитуду A колебаний бруса в новом установившемся режиме.

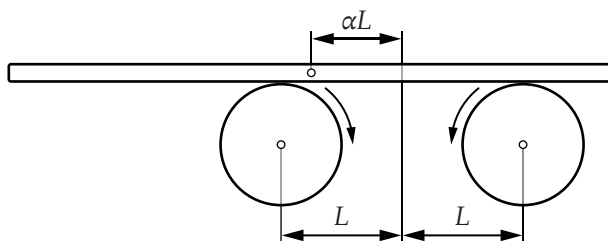


Рис. 4

17. (На ленте транспортёра) Тело массой m прикреплено к пружине жёсткостью k , второй конец которой закреплён на вертикальной стене. Тело лежит на горизонтальной ленте транспортёра, пружина расположена горизонтально (см. рис. 5). Коэффициенты трения покоя и скольжения между телом и лентой можно считать одинаковыми и равными μ . В момент времени $t = 0$ лента приходит в движение, и её скорость нарастает по закону $v = at$. Под действием сил трения и упругости тело начинает колебаться. Найдите амплитуду этих колебаний, рассмотрев случаи $a < \mu g$ и $a \geq \mu g$.

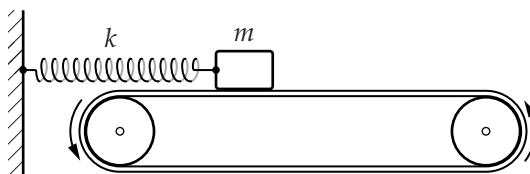


Рис. 5

18. (Удар воздушного шарика о стенку) Воздушный шарик радиуса R налетает на плоскую жёсткую стенку по нормали к её поверхности со скоростью v_0 . Обозначим через $x(t)$ перемещение центра шарика в направлении нормали к стенке относительно его положения в момент первого касания. Таким образом, расстояние от центра шарика до стенки в процессе соударения равно $R - x(t)$.

Примите следующую модель соударения. Вне области контакта поверхность шарика сохраняет форму сферы радиуса R с центром в текущем положении центра шарика. Стенка отсекает от этой сферы шаровой сегмент высотой x . Объём шарика уменьшается на объём этого сегмента, а область контакта представляет собой круг, совпадающий с его основанием. Материал оболочки, приходящийся

на отсечённый сегмент, собирается в области контакта в складки. Деформацию считайте малой: $x_{\max} \ll R$.

Оболочку шарика считайте невесомой, гибкой и нерастяжимой. Внутри шарика находится воздух массой m под начальным давлением p_0 , атмосферное давление равно $p_{\text{атм}}$. Воздух можно считать идеальным двухатомным газом. Считая изменение состояния воздуха квазистатическим, рассмотрите два процесса: изотермический и адиабатический. Определите время соударения шарика со стенкой в двух предельных случаях: когда избыточное давление в шарике сравнимо с атмосферным, $p_0 - p_{\text{атм}} \sim p_{\text{атм}}$, и когда оно равно нулю: $p_0 = p_{\text{атм}}$.

Подсказка. Может оказаться полезным значение интеграла:

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \approx 1,311.$$

19. (Уравнение Бине) Точка массой m движется в поле тяготения неподвижного центра массы M . Положение точки задают полярными координатами r и φ с началом координат в притягивающем центре. При $\varphi = 0$ расстояние до центра равно r_0 , а скорость v_0 направлена перпендикулярно радиус-вектору. Из уравнения движения и закона сохранения момента импульса можно получить уравнение, связывающее координаты точки друг с другом:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2},$$

где $u = \frac{1}{r}$, а $h = v_0 r_0$ — момент импульса точки, отнесённый к её массе. Получите с учётом начальных условий уравнение траектории $r(\varphi)$ точки. Как связана с начальными условиями форма орбиты?

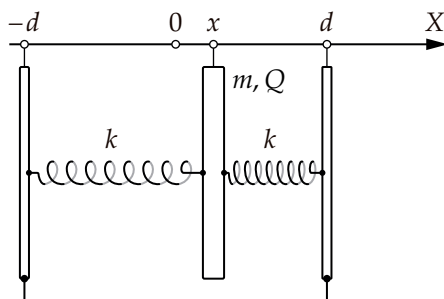


Рис. 6

20. (Заряженная пластина в конденсаторе) Две одинаковые неподвижные проводящие пластины площадью S расположены параллельно друг другу на расстоянии $2d$ и соединены проводом. Посередине между ними находится

параллельная им проводящая пластина той же площади, имеющая массу m и фиксированный заряд Q . Подвижная пластина соединена с каждой из неподвижных пластин одинаковой пружиной жёсткостью k (см. рис. 6) и может двигаться только перпендикулярно своей поверхности. В среднем положении силы упругости пружин уравновешены.

В начальный момент подвижную пластину смещают из среднего положения на малое расстояние $x_0 \ll d$ и отпускают без начальной скорости. Опишите её последующее движение при различных значениях жёсткости k , включая критический случай. Краевыми эффектами можно пренебречь; заряд свободно перераспределяется по поверхностям проводников.

21. (*Нижний лист из пачки бумаги*) На очень длинном горизонтальном столе лежит пачка из $N \gg 1$ одинаковых листов бумаги размером $L \times W$, где $L > W$. Коэффициенты трения листа о стол и листов друг о друга одинаковы и равны μ , а коэффициенты трения покоя и скольжения можно считать совпадающими. Человек хватается самый нижний лист за короткую сторону и вытягивает его вдоль длинной стороны с постоянной скоростью u , так что этот лист всё время скользит и по столу, и по лежащей на нём пачке. Пачку считайте достаточно гибкой: та её часть, из-под которой нижний лист уже вышел, ложится на стол всей поверхностью.

Изобразите качественный график зависимости ускорения a пачки без нижнего листа от времени в случае очень большой скорости u . Определите минимальную скорость $u_{\min}$, с которой нужно тащить нижний лист, чтобы вытащить его полностью, отделив от остальной пачки. Считая, что $u > u_{\min}$, найдите скорость пачки в тот момент, когда нижний лист выходит из-под неё, и расстояние, которое пачка пройдёт к этому моменту.

Указания

3. В первой системе амплитуда задана, а часть колебания просто вырезана; во второй вырезать нечего, зато на половине колебания меняется длина маятника.

5. Сила упругости шнура находится дифференцированием $W(x)$; проверьте, что при малых удлинениях она подчиняется закону Гука с жёсткостью k . Уравнение для $x_{\max}$ сводится к кубическому подстановкой $w = \sqrt{1 + \frac{x}{a}}$, и один его корень известен заранее: он отвечает начальному моменту.

7. Жёсткость пружины в условии не дана — её определяет начальное равновесие нижнего груза. После обрезания верёвки удобно ввести в рассмотрение координату центра масс и относительные координаты грузов.

- 8.** Удобно перейти к относительному движению груза и коробки. Что происходит с относительной скоростью при абсолютно упругом ударе, а что — с энергией относительного движения и с амплитудой?
- 9.** Положение равновесия груза движется равномерно. Диаграмму нужно строить именно в неподвижной системе отсчёта — кривая окажется хорошо известной, и это не окружность.
- 10.** Сухое трение не меняет период, но сдвигает положение равновесия в ту или другую сторону в зависимости от направления скорости. Проследите за последовательностью точек поворота и за тем, при каком условии кубик останавливается окончательно.
- 12.** Выразите силу, действующую на одну из элементарных масс, через положение центра масс галактики.
- 14.** Обозначьте через y длину участка верёвки в вертикальном колене. Какая часть верёвки создаёт движущую силу и какая масса при этом ускоряется? Обратите внимание на знак силы в двух вариантах ориентации вертикального колена.
- 15.** Бусинка надета на стержень, поэтому её вещество не лежит на оси стержня — именно это делает силу конечной. Убедитесь, что от размеров бусинки ответ не зависит. Стержень тоже движется.
- 16.** Сравните модуль скорости бруса с линейной скоростью поверхности валиков. Пока брус движется медленнее, силы трения со стороны валиков направлены в противоположные стороны и движение бруса является гармоническим. Что происходит с направлением сил трения, когда модуль скорости бруса превышает линейную скорость поверхности валиков?
- 17.** Сравните ускорение ленты с наибольшим ускорением, которое трение способно сообщить телу.
- 19.** Уравнение Бине — это уравнение гармонического осциллятора по переменной φ со сдвинутым положением равновесия.
- 20.** Подвижная пластина и соединённые проводом неподвижные обкладки образуют два конденсатора, соединённые параллельно. Найдите их суммарную ёмкость как функцию смещения x . Как электростатическое взаимодействие изменяет эффективную жёсткость системы?
- 21.** Сила, действующая на пачку, зависит от того, какая её часть ещё лежит на нижнем листе. Получите и проанализируйте уравнение движения пачки.