

Кеплерово движение

Во всех задачах листка, где речь идёт о Земле, она считается *идеальной*: невращающийся шар со сферически симметричным распределением массы, атмосфера отсутствует, а связанная с Землёй система отсчёта инерциальна. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, первая и вторая космические скорости, $7,9 \text{ км/с}$ и $11,2 \text{ км/с}$, считаются известными. То же относится и к фундаментальным физическим константам: все эти величины могут входить в ответы без специальных оговорок.

1. (Один процент) На высоте 1 км над поверхностью Земли телу сообщили горизонтальную скорость, на 1 % меньшую первой космической. Через какое время тело упадёт на Землю? На каком расстоянии от точки старта (измеренном вдоль поверхности Земли) произойдёт падение тела?

Теперь предположим, что на той же высоте телу сообщили горизонтальную скорость, на 1 % превышающую первую космическую. Какой наибольшей высоты над поверхностью Земли достигнет тело при дальнейшем движении? За какое время оно достигнет этой высоты?

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите движение тела в полярных координатах. Получите дифференциальное уравнение для функции $r(t)$ и упростите его, воспользовавшись малым отличием начальной скорости от первой космической.

2. (Стрельба с космической скоростью) С поверхности Земли выпускают снаряд с первой космической скоростью под углом $\alpha = 0,01$ рад к горизонту. На каком расстоянии от точки старта и через какое время приземлится снаряд? Ответьте на те же вопросы в случае, когда снаряд выпускают под углом α к вертикали.

3. (Падение Луны на Землю) Представьте себе, что в результате ужасной космической катастрофы Луна мгновенно остановилась в своём орбитальном движении вокруг Земли. Определите время, за которое Луна упадёт на Землю, и относительную скорость тел в момент столкновения. Период обращения Луны вокруг Земли равен $T_0 = 27,3$ суток.

Орбиту Луны можно считать круговой, с радиусом, значительно превосходящим радиус Земли, а массу и размеры Луны — пренебрежимо малыми по сравнению с массой и размером Земли.

УКАЗАНИЕ. Движение вдоль радиуса в гравитационном поле притягивающего центра можно рассматривать как предельный случай движения по крайне узкой и вытянутой эллиптической орбите.

4. (Свойства конических сечений) Получите уравнение эллипса в полярных координатах (начало отсчёта совпадает с одним из фокусов)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

где $p = \frac{b^2}{a}$ — фокальный параметр (половина длины хорды, перпендикулярной главной оси и проходящей через фокус), $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ — эксцентриситет эллипса, a и b длины большой и малой полуосей соответственно.

Какой вид имеют уравнения гиперболы и параболы в полярных координатах?

Пусть тело массой m движется в гравитационном поле притягивающего центра массой M . Известны полная энергия тела E и момент импульса L . Как выражаются параметры p и e траектории через E , L , m и M ? Для эллиптической траектории также определите длины полуосей a и b . Как период обращения тела по эллиптической траектории связан с полной энергией E тела?

УКАЗАНИЕ. Стартуйте с определений: эллипс — геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) равна $2a$; гипербола — геометрическое место точек, для которых постоянен модуль разности этих расстояний; парабола — геометрическое место точек, равноудалённых от фокуса и директрисы. Расстояния от точки до двух фокусов удобно связать теоремой косинусов.

5. (Отношение экстремальных скоростей) Найдите отношение максимальной и минимальной скоростей тела при движении по эллиптической орбите с эксцентриситетом e .

6. (Вектор эксцентриситета) Покажите, что при движении материальной точки под действием центральной силы $\mathbf{F} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, обратно пропорциональной квадрату расстояния от точки до силового центра, остаётся постоянным *вектор эксцентриситета*:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{L}}{k} - \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\mathbf{v}$ — скорость точки, $\mathbf{L}$ — её момент импульса относительно силового центра. Покажите, что вектор $\mathbf{e}$ всегда равен по модулю эксцентриситету орбиты и сонаправлен вектору, проведённому из силового центра в *перицентр* (ближайшая к силовому центру точка орбиты).

УКАЗАНИЕ. Продифференцируйте обе части определения вектора эксцентриситета по времени. В последующих преобразованиях используйте тождество для двойного векторного произведения

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

7. (Годограф скорости и вектор эксцентриситета) Материальная точка движется в поле центральной силы $\mathbf{F} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Пусть φ — полярный угол радиус-вектора точки в плоскости орбиты, а $L = |\mathbf{L}|$ — модуль её момента импульса относительно силового центра. Покажите, что

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\varphi} = -\frac{k}{L} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r},$$

то есть производная скорости по полярному углу — вектор постоянной длины, поворачивающийся вместе с радиус-вектором. Выведите отсюда, что годограф скорости — траектория, которую описывает конец вектора $\mathbf{v}$, отложенного от начала координат, — представляет собой окружность или дугу окружности, и найдите радиус годографа.

Выразите радиус-вектор центра годографа $\mathbf{v}_c$ (в пространстве скоростей) через момент импульса $\mathbf{L}$ и вектор эксцентриситета $\mathbf{e}$ из предыдущей задачи. Покажите, что отношение расстояния от начала координат до центра годографа к его радиусу равно эксцентриситету орбиты $e = |\mathbf{e}|$. При каких значениях e годограф — полная окружность, а при каких — лишь дуга?

УКАЗАНИЕ. Перейдите в выражении для ускорения от производной по времени к производной по полярному углу, воспользовавшись сохранением момента импульса $L = mr^2\dot{\phi}$. Центр годографа удобно найти, подставив разложение $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{u}$ в определение вектора эксцентриситета.

8. (Годограф скорости и орбита кометы) В перицентре орбиты кинетическая энергия кометы в полтора раза больше модуля её потенциальной энергии. Изобразите траекторию кометы. Найдите угол между асимптотами траектории, содержащий саму траекторию. Какова угловая мера дуги окружности, являющейся годографом скорости кометы? Определите также отношение радиуса этой окружности к расстоянию от её центра до начала координат.

9. (Касательный импульс и годограф) Космический аппарат движется по круговой орбите радиуса R вокруг планеты массой M . В некоторый момент кратковременное включение двигателя сообщает аппарату дополнительную скорость Δv , направленную по касательной к орбите, в направлении движения. Как при этом изменяются радиус и положение центра годографа скорости? Найдите эксцентриситет новой орбиты и длину её большой полуоси. При каком значении Δv аппарат навсегда улетит от планеты?

10. (Смещение годографа скорости) Космический аппарат массой m движется по круговой орбите радиуса R вокруг притягивающего центра массой M . В некоторой точке траектории аппарату сообщают мгновенный импульс, направленный вдоль радиуса орбиты, в результате чего модуль изменения скорости оказывается равным модулю её начального значения. Найдите эксцентриситет новой орбиты. Покажите, что центр годографа скорости в результате передачи дополнительного импульса смещается перпендикулярно вектору эксцентриситета новой орбиты, и определите величину этого смещения.

11. (Угол отклонения) Найдите угол отклонения вектора скорости лёгкой кометы, движущейся в гравитационном поле массивной планеты массой M . Скорость кометы на бесконечности равна v_0 , а прицельный параметр равен d .

12. (Угол рассеяния) Два протона движутся из бесконечности навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v вдоль параллельных прямых, расстояние между которыми равно d . Найдите минимальное расстояние, на которое сблизятся протоны в процессе движения. На какой угол от первоначального направления отклонится траектория каждого протона спустя длительное время после момента их максимального сближения?

13. (Вспышка в двойной системе) Две звезды массами M_1 и M_2 обращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам; расстояние между звёздами равно d . В результате вспышки первая звезда мгновенно сбрасывает часть вещества, превращаясь в компактный объект массой $M'_1 < M_1$. Скорости звёзд при вспышке не меняются, а притяжением сброшенной оболочки можно пренебречь. При каком условии система останется гравитационно связанной? Если оно выполнено, найдите большую полуось и эксцентриситет новой орбиты относительного движения звёзд.

14. (Угол вылета и длина полуоси) Камень вылетает с экватора Земли и приземляется в точке с широтой φ (напомним, что для южного полушария значения широты отрицательные, а для северного – положительные). Под каким углом β к вертикали должна быть направлена начальная скорость камня, чтобы длина большой полуоси эллиптической траектории была минимальной?

15. (Теорема Ламберта) Докажите, что время перелёта между двумя точками по кеплеровской орбите зависит только от длины её большой полуоси a , суммы расстояний $r_1 + r_2$ от этих точек до притягивающего центра и длины хорды s , соединяющей точки. Покажите, что время перелёта не зависит от эксцентриситета и ориентации орбиты.

16. (Минимальный эксцентриситет) В двух точках своей орбиты комета имела скорости $2v$ и v , направленные взаимно перпендикулярно. Какой наименьший эксцентриситет может иметь орбита кометы?

17. (Прецессия перицентра) Потенциальная энергия спутника массой m в поле планеты немного отличается от ньютоновской:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2},$$

где β — положительная постоянная, малая по сравнению с $\frac{L^2}{m}$, а L — момент импульса спутника. Покажите, что траектория спутника — медленно поворачивающийся эллипс. На какой угол и в какую сторону поворачивается вектор эксцентриситета $\mathbf{e}$ этого эллипса за один оборот спутника?