

Разные задачи

1. (Пластин и брусок) По закреплённой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, скользил брусок массой $2m$, двигаясь с постоянной скоростью v . Сверху без начальной скорости отпустили кусок пластина массой m . Пролетев расстояние H , пластилин упал на брусок и прилип к нему. Какое количество теплоты выделилось при неупругом соударении пластина с бруском? Известно, что после попадания пластина брусок не остановился. Ускорение свободного падения равно g .

2. (Плавающий брусок) Однородный брусок плотностью $\rho = 500 \text{ кг/м}^3$ имеет форму прямоугольного параллелепипеда длиной $L = 1 \text{ м}$ и квадратным поперечным сечением со стороной $a = 10 \text{ см}$. Брусок опустили в большое озеро (плотность воды $\rho_0 = 2\rho$) и удерживали в неустойчивом положении равновесия, при котором одна из его длинных граней была сухой и горизонтальной, а половина объёма бруска находилась под водой. Брусок отпустили, и после затухания колебаний он принял устойчивое положение, повернувшись вокруг своей продольной оси симметрии на угол α . Изменением уровня воды в озере можно пренебречь.

а) Определите угол α .

б) На сколько уменьшилась потенциальная энергия системы «брусок + вода»? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

3. (Электрокалорический генератор) Рассмотрим плоский конденсатор, пространство между обкладками которого заполнено диэлектриком. Площадь обкладок равна S , расстояние между ними равно d , объём диэлектрика $V = Sd$. Обкладки несут равные по модулю и противоположные по знаку заряды.

Электрическое поле в диэлектрике создаётся не только свободными зарядами на обкладках, но и связанными зарядами, возникающими вследствие поляризации диэлектрика. В простейшей модели линейного диэлектрика поляризация пропорциональна напряжённости поля. В этом случае поверхностная плотность свободного заряда на обкладках связана с напряжённостью поля соотношением

$$\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon E,$$

где σ — поверхностная плотность свободного заряда на обкладках, ε_0 — электрическая постоянная, а ε — диэлектрическая проницаемость вещества.

Однако существуют диэлектрики, электрические свойства которых существенно отличаются от свойств линейных диэлектриков. К их числу относятся *сегнетоэлектрики*, для которых связь между поверхностной плотностью свободного заряда σ и напряжённостью поля E может быть нелинейной, а электрические

свойства вещества заметно зависят от температуры. В дальнейшем рассматривается конденсатор, полностью заполненный сегнетоэлектриком.

Изменение температуры приводит к изменению поляризации сегнетоэлектрика и, следовательно, к изменению заряда на обкладках конденсатора. Поэтому в общем случае поверхностную плотность свободного заряда следует рассматривать как функцию двух переменных: $\sigma = \sigma(E, T)$.

При фиксированной температуре состояние конденсатора однозначно задаётся точкой на диаграмме σ – E . В первом приближении электрические и тепловые свойства системы описываются соотношениями

$$\begin{aligned}d\sigma &= \varepsilon_0 \varepsilon dE + p dT, \\ \frac{\delta Q}{V} &= c dT + pT dE,\end{aligned}$$

где δQ — количество теплоты, полученное сегнетоэлектриком, а коэффициенты ε , c и p считаются известными постоянными.

Для большинства сегнетоэлектриков *пироэлектрический коэффициент* отрицателен: $p < 0$. Это означает, что при повышении температуры поляризация вещества уменьшается. В данной задаче также предполагается, что $p < 0$.

Благодаря зависимости $\sigma(E, T)$ циклическое изменение температуры и электрического поля может приводить к преобразованию тепловой энергии в электрическую. Во втором и третьем пунктах задачи рассматриваются идеализированные циклы такого преобразования, а в последнем пункте — простейшая модель *электрокалорического генератора*.

а) Изобразите на диаграмме σ – E изотерму и касательную к адиабате, пересекающей изотерму в некоторой точке. Найдите отношение тангенсов углов наклона касательных к адиабате и изотерме в точке пересечения. Изобразите также две изотермы, соответствующие разным температурам.

б) Рассмотрим классический цикл преобразования энергии в конденсаторе $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ (цикл Ольсена), состоящий из следующих процессов: $1 \rightarrow 2$ — изотермическая зарядка, при которой поле в конденсаторе увеличивается на величину ΔE , а температура остаётся постоянной; $2 \rightarrow 3$ — нагрев при постоянном поле; изотермическая разрядка $3 \rightarrow 4$ и охлаждение при постоянном поле $4 \rightarrow 1$. Определите КПД η_T цикла. Выразите ответ через безразмерную комбинацию постоянных $r = -\frac{p\Delta E}{c} > 0$, максимальную и минимальную температуры в цикле $T_{\max}$ и $T_{\min}$.

в) В другом цикле зарядка и разрядка производятся адиабатически ($\delta Q = 0$), при этом переходы между адиабатами осуществляют как и в предыдущем случае при постоянном электрическом поле. Рассмотрите такой цикл, в котором

относительные изменения поля и температуры малы, при этом справедливы следующие неравенства:

$$r \ll 1, \quad \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} \ll 1, \quad \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} > r.$$

Определите КПД $\eta_{\delta Q=0}$ этого цикла. Ответ выразите через комбинацию постоянных r и температуры $T_{\max}$ и $T_{\min}$, как в предыдущем пункте.

г) Конденсатор соединён последовательно с нагрузочным резистором сопротивлением R , полученная цепь подключена к идеальному источнику с ЭДС $\mathcal{E}$. Температура диэлектрика изменяется по гармоническому закону $T(t) = T_0 + \Delta T \cos(\omega t)$, где $\Delta T \ll T_0$. В этих условиях в цепи устанавливаются колебания тока с частотой ω .

Найдите амплитуду напряжения U_0 на резисторе и среднюю мощность $\langle P \rangle$, выделяющуюся на нём. Параметры: $\mathcal{E}$, R , ω , T_0 , ΔT , а также коэффициенты ε , c и p — известны. Расстояние между обкладками конденсатора и их площадь равны d и S соответственно.

Ответы и решения

1. Отметим сразу, что поскольку брусок движется с постоянной скоростью, угол α и коэффициент трения μ связаны соотношением

$$\sin \alpha = \mu \cos \alpha. \quad (1)$$

Отсюда следует и другой факт: сила взаимодействия бруска с плоскостью $\mathbf{R}$, равная векторной сумме сил нормальной реакции и трения, направлена вертикально вверх, пока брусок скользит по плоскости. В частности в процессе «прилипания» пластилина к бруску $\mathbf{R}$ не меняет своего направления, поскольку по условию брусок не останавливается. Таким образом, суммарная сила, действующая на систему «брусок + пластилин» в процессе прилипания пластилина, направлена вертикально: кроме $\mathbf{R}$ и сил тяжести другие силы на систему не действуют. Следовательно горизонтальная проекция импульса системы в процессе прилипания сохраняется:

$$2mv \cos \alpha = 3mu \cos \alpha,$$

где u — скорость бруска с пластилином после прилипания. Из последнего соотношения легко находим: $u = \frac{2v}{3}$ и далее получается ответ:

$$Q = \frac{2mv^2}{2} + mgH - \frac{3mu^2}{2} = m \left(gH + \frac{v^2}{3} \right).$$

Скорость u может быть найдена и другим способом. В процессе прилипания пластилина на брусок действуют ударные силы: трения F и нормальной реакции N (предполагаем, что прилипание происходит почти мгновенно), значительно превышающие по величине силы тяжести. Запишем теорему об изменении импульса в процессе удара в проекциях на две оси: вдоль плоскости и перпендикулярно ей. Имеем:

$$\begin{cases} 3mu - 2mv - mv_0 \sin \alpha = -\mu P_N, \\ 0 + mv_0 \cos \alpha = P_N. \end{cases}$$

Здесь $P_N = \int_0^\tau N(t)dt$ — импульс силы реакции, $v_0 = \sqrt{2gH}$ — скорость пластилина непосредственно перед контактом с бруском, τ — время соударения (прилипания пластилина). Выразим ударный импульс силы реакции из второго уравнения и подставим в первое. Учитывая соотношение (1), получим равенство $3mu - 2mv = 0$.

2. Рассмотрим различные положения бруса, такие, что его продольная ось симметрии горизонтальна и находится в плоскости поверхности воды. При таком расположении объём погруженной в воду части бруса равен половине объёма бруса, следовательно сила Архимеда равна силе тяжести. Пусть угол между верхней гранью бруса и горизонтальной плоскостью равен φ . Тогда погруженная в воду часть бруса имеет форму призмы, поперечное сечение которой — трапеция. Точка приложения силы Архимеда соответствует центру масс погруженной в воду части бруса.

Введём систему отсчёта Oxy так, что ось Ox горизонтальна, Oy — вертикальна и направлена вверх, начало отсчёта совпадает с центром масс бруса. Координаты центра масс погруженной части можно найти, представив образующуюся в сечении погруженной части бруса трапецию в виде совокупности прямоугольника и двух треугольников с положительной и отрицательной поверхностной плотностью. Вообще говоря, для определения положения равновесия достаточно рассчитать только горизонтальную координату центра масс: в равновесии она должна быть равна нулю.

Используем в расчёте тот факт, что координаты центра масс однородного треугольника равны среднему арифметическому координат его вершин. Справедливо соотношение

$$x_{\text{см}}^{(1)}(\varphi) = \frac{\frac{a^2 \operatorname{tg} \varphi}{4} \cdot \frac{a}{6} \left(\cos \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \right) - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{4} \sin \varphi}{\frac{a^2}{2}} = \frac{a \sin \varphi}{12} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 2 \right).$$

Приравнявая выражение в скобках нулю, получаем тригонометрическое уравнение, которое имеет два физически осмысленных корня: $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, соот-

ветствующих положениям равновесия бруса. Исследование устойчивости этих положений можно провести, проанализировав смещение точки приложения силы Архимеда при повороте бруса на малый угол $\Delta\varphi$ из положения равновесия. Поскольку $x_{\text{см}}^{(1)}(\Delta\varphi) < 0$, положение равновесия $\varphi = 0$ будет неустойчивым. Аналогично из неравенства $x_{\text{см}}^{(1)}(\pi/4 - \Delta\varphi) < 0$ следует, что $\varphi = \pi/4$ соответствует устойчивому положению равновесия.

Впрочем, найти положения равновесия, а также исследовать их устойчивость можно и другим способом. Для этого сначала определим y -координату центра масс погруженной части:

$$y_{\text{см}}^{(1)} = \frac{-\frac{a^2 \operatorname{tg} \varphi}{4} \cdot \frac{a \sin \varphi}{6} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{4} \cos \varphi}{\frac{a^2}{2}} = -\frac{a}{12} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + 3 \cos \varphi \right).$$

Потенциальная энергия системы «вода+брус» в условиях задачи (озеро большое, отношение плотностей 1 : 2) с точностью до постоянной дается формулой

$$W = -2\rho \cdot \frac{La^2}{2} y_{\text{см}}^{(1)} g = -\rho g La^2 y_{\text{см}}^{(1)}.$$

Чтобы понять, как выводится эта формула, представьте, что из озера сначала «удаляется» объем воды, соответствующий погруженной части бруса, а затем на его место «вставляется» брус.

Исследуем функцию $W(\varphi)$. Отметим, что $W(\varphi)$ даёт значения потенциальной энергии для интервала углов $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Кроме того $W(\varphi)$ — периодическая, её период равен $\frac{\pi}{2}$. Первая производная этой функции равна

$$\frac{dW}{d\varphi} = \frac{\rho g La^2}{12} \sin \varphi (\operatorname{tg} \varphi - 1).$$

Нули производной: $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$, соответствующие экстремумам $W(\varphi)$, определяют положения равновесия. Анализируя знаки производной вблизи точек экстремума, можно определить его тип: максимум или минимум. Минимум соответствует устойчивому положению равновесия, а максимум — неустойчивому. В итоге для искомого уменьшения потенциальной энергии получается формула:

$$-\Delta W = W(0) - W\left(\frac{\pi}{4}\right) = \rho g La^3 \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6} \right) = \frac{\rho g La^3 (3 - 2\sqrt{2})}{12}.$$

3. Для изотермического процесса ($dT = 0$) из соотношений, данных в условии, получаем:

$$\left. \frac{d\sigma}{dE} \right|_T = \varepsilon_0 \varepsilon.$$

Таким образом, на диаграмме σ - E изотерма является прямой линией с наклоном $\varepsilon_0\varepsilon$. При этом поскольку $p < 0$, линию $E = \text{const}$ изотерма с большей температурой пересекает ниже, чем изотерма с меньшей.

Для адиабатического процесса сначала имеем соотношение

$$dT = -\frac{pT}{c}dE.$$

Подставим его в выражение для $d\sigma$, тогда после простых преобразований получим

$$\left. \frac{d\sigma}{dE} \right|_{\delta Q=0} = \varepsilon_0\varepsilon - \frac{p^2T}{c}.$$

Поскольку в правой части этого соотношения стоит температура T , адиабата не является прямой линией, установить однозначно зависимость $\sigma(E)$ на адиабате достаточно сложно. Впрочем, это не мешает найти отношение тангенсов углов наклона касательных:

$$\frac{\text{tg } \theta_{\delta Q=0}}{\text{tg } \theta_T} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon - \frac{p^2T}{c}}{\varepsilon_0\varepsilon} = 1 - \frac{p^2T}{c\varepsilon_0\varepsilon}.$$

В цикле Ольсена тепло подводится к конденсатору на участках $2 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 4$, а отводится на оставшихся двух участках. При этом максимальная температура в цикле достигается на изотерме $3 \rightarrow 4$, а минимальная на изотерме $1 \rightarrow 2$. Для подведённой и отведённой за цикл теплоты имеем соотношения:

$$Q_H = V(c(T_{\max} - T_{\min}) - pT_{\max}\Delta E), \quad Q_X = -V(c(T_{\max} - T_{\min}) - pT_{\min}\Delta E).$$

Для КПД цикла получаем формулу

$$\eta_T = \frac{Q_H + Q_X}{Q_H} = \frac{-p\Delta E(T_2 - T_1)}{c(T_2 - T_1) - pT_2\Delta E} = \frac{r(T_{\max} - T_{\min})}{(T_{\max} - T_{\min}) + rT_{\max}}.$$

В случае адиабатического нагрева при условии малых изменений температуры и поля, удовлетворяющих неравенствам из условия, температура в точке 2 оказывается приближённо равна

$$T_2 = T_1 - \frac{pT_1}{c} = T_1(1 + r),$$

а температура в точке 4 равна

$$T_4 = T_3(1 - r).$$

Для подведённой и отведённой за цикл теплоты имеем выражения:

$$Q_H = Vc(T_3 - T_1(1 + r)), \quad Q_X = Vc(T_1 - T_3(1 - r)).$$

Из последнего неравенства, данного в условии следует, что максимальная температура достигается в точке 3, а минимальная в точке 1. Таким образом, искомый КПД равен

$$\eta_{\delta Q=0} = \frac{r(T_{\max} - T_{\min})}{(T_{\max} - T_{\min}) - rT_{\min}}.$$

Для ответа на вопросы последнего пункта задачи запишем дифференциальное уравнение для силы тока $I(t)$ в цепи. Используем соотношения

$$\sigma = \frac{q}{S}, \quad E = \frac{\mathcal{E} - IR}{d}, \quad I = \frac{dq}{dt}.$$

Из условия имеем:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{dE}{dt} + p \frac{dT}{dt}.$$

Подставляя закон изменения температуры $T(t)$, данный в условии, после преобразований получаем:

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon R}{d} \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{S} \cdot I = p\omega \Delta T \sin \omega t.$$

Это уравнение совпадает с уравнением для цепи переменного тока, состоящей из последовательно соединённых резистора с сопротивлением $R_0 = \frac{1}{S}$ и катушки с индуктивностью $L_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon R}{d}$, к которым приложено переменное напряжение $V_0 \sin \omega t$ с амплитудой $V_0 = p\omega \Delta T$.

Используя метод комплексных амплитуд или векторных диаграмм, получим выражения для амплитуды напряжения и средней мощности:

$$U_0 = \frac{|p|\omega \Delta T R S}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon R S}{d}\right)^2}}, \quad \langle P \rangle = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{p^2 \omega^2 (\Delta T)^2 R S^2}{2 \left[1 + \left(\frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon R S}{d}\right)^2 \right]}.$$