

Разные задачи 2.

1. (Клин и брусок) Кли́н массой $M = 250$ г с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ при основании покоится на гладкой горизонтальной плоскости. На клин положили брусок массой $m = 100$ г и ударом сообщили ему некоторую скорость, направленную вверх вдоль наклонной поверхности клина. Какое количество теплоты Q выделилось в результате трения бруска о клин, если известно, что максимальная высота, на которую поднялся брусок от своего начального положения, равна $h = 20$ см. Коэффициент трения бруска о наклонную поверхность клина $\mu = 0,6$. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с².

2. (Кольцо и стержень) В однородном диэлектрическом цилиндре длиной $2L$ и диаметром $2R$ сделан цилиндрический канал малого радиуса r ($r \ll R$), соосный цилиндру. В канал вставлен однородно заряженный стержень длиной $2L$ круглого сечения, диаметр стержня чуть меньше диаметра канала. Стержень может двигаться свободно вдоль оси канала. На цилиндре закреплено тонкое однородно заряженное кольцо, плоскость которого перпендикулярна оси цилиндра и делит цилиндр пополам. Масса цилиндра с кольцом равна массе стержня и равна M . Стержень и кольцо несут одинаковые заряды разных знаков, равные по абсолютной величине q .

Исходно система находится в положении равновесия. Стержень смещают на небольшое расстояние x_0 ($x_0 \ll L$) вдоль оси и отпускают.

- Чему равна максимальная скорость стержня, если цилиндр закреплён?
- Чему равна максимальная скорость стержня после освобождения системы, если цилиндр не удерживается внешней силой?

Гравитацией, всеми видами трения, а также эффектами, связанными с поляризацией диэлектрика, можно пренебречь.

3. (Падение электрона на ядро) В соответствии с законами классической электродинамики заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Релятивистские эффекты не учитываются. Масса и модуль заряда электрона, скорость света в вакууме и электрическая постоянная обозначаются через m_e , e , c и ε_0 соответственно и считаются известными во всех пунктах задачи.

Мощность излучения нерелятивистского электрона, движущегося с ускорением a , может быть выражена через эти константы в виде

$$P = A e^\alpha c^\beta \varepsilon_0^\gamma a^\delta,$$

где A — безразмерная постоянная.

- Используя анализ размерностей, найдите показатели степени α , β , γ , δ .

б) Из-за потерь энергии на излучение электрон, движущийся вокруг неподвижного протона, постепенно приближается к нему по скручивающейся спирали. Считая, что в каждый момент движение можно рассматривать как круговое, а радиус орбиты R за один оборот меняется незначительно, получите дифференциальное уравнение для $R(t)$ и найдите время, через которое электрон упадёт на протон (расстояние R обратится в нуль), если начальное расстояние равно R_0 . Протон считайте точечным. Выразите ответ через m_e , e , c , ϵ_0 , R_0 и постоянную A .

в) Используя выражение для времени падения, полученное в предыдущем пункте, и приняв согласно классической электродинамике $A = \frac{1}{6\pi}$, вычислите численно это время для начального радиуса, равного борovскому радиусу $R_0 = a_0 \approx 5,29 \cdot 10^{-11}$ м.

Считайте известными численные значения постоянных:

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг},$$

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$$

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,00 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2.$$

Сравните полученное время с характерным временем жизни возбуждённых атомов ($\sim 10^{-8}$ с). Какой вывод можно сделать о стабильности атома в рамках классической модели?

Ответы и решения

1. В лабораторной системе отсчёта на клин со стороны бруска действуют сила нормального давления, равная по модулю N и направленная под углом α к вертикали, и сила трения μN , направленная вверх вдоль наклонной плоскости под углом α к горизонтали. Записывая второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную ось, получаем уравнение движения клина:

$$Ma_{\text{кл}} = N \sin \alpha + \mu N \cos \alpha = N(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Перейдём в неинерциальную систему отсчёта, связанную с клином. В ней на брусок действуют сила тяжести mg , сила нормальной реакции N (перпендикулярно наклонной плоскости), сила трения μN (вдоль плоскости, вниз) и сила инерции $ma_{\text{кл}}$ (горизонтально, в сторону, противоположную ускорению клина). В направлении, перпендикулярном наклонной плоскости, брусок не имеет ускорения, поэтому сумма проекций сил на это направление равна нулю:

$$N = mg \cos \alpha - ma_{\text{кл}} \sin \alpha.$$

Подставляя в это соотношение $a_{\text{кл}}$ из уравнения движения клина, получаем после преобразований выражение для силы нормальной реакции

$$N = \frac{Mmg \cos \alpha}{M + m \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

Путь, пройденный бруском по клину до остановки, равен $s = \frac{h}{\sin \alpha}$. Работа силы трения (произведение силы трения на относительное перемещение):

$$A_{\text{тр}} = -\mu N s = -\frac{\mu N h}{\sin \alpha}.$$

В верхней точке брусок и клин движутся совместно с постоянной скоростью, поэтому система отсчёта, связанная с клином, инерциальна. В ней на брусок вдоль наклонной плоскости действуют составляющая силы тяжести $mg \sin \alpha$, направленная вниз вдоль наклонной плоскости, и сила трения, направленная вверх вдоль наклонной плоскости. Поскольку $\mu > \tan \alpha$, максимальное значение силы трения покоя μN превышает $mg \sin \alpha$, поэтому брусок не соскальзывает с клина после достижения верхней точки. Выделившееся в системе количество теплоты равно работе силы трения с обратным знаком:

$$Q = -A_{\text{тр}} = \frac{\mu M m g h \operatorname{ctg} \alpha}{M + m \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \approx 0,17 \text{ Дж}.$$

2. Сила взаимодействия. При смещении стержня на x ($x \ll L$) в приближении тонкого стержня ($r \ll R$) сила, действующая на стержень со стороны кольца, равна силе, действующей на точечный заряд величиной $q \frac{x}{L}$, расположенный на оси кольца на расстоянии L от его плоскости. Действительно, при смещении стержня на расстояние x из положения равновесия на часть стержня длиной $2L - 2x$, располагающуюся симметрично относительно плоскости кольца, действует нулевая сила со стороны кольца. Таким образом, взаимодействие стержня с кольцом эквивалентно взаимодействию участка стержня длиной $2x$, середина которого расположена на расстоянии L от плоскости кольца.

Сила, действующая на эффективный заряд $\frac{qx}{L}$, со стороны кольца направлена к кольцу и равна по модулю:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(L^2 + R^2)^{3/2}} \cdot x.$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия стержня при смещении x задаётся выражением

$$W = \frac{kx^2}{2}, \quad k = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(L^2 + R^2)^{3/2}}.$$

а) Цилиндр закреплён. В положении максимального смещения x_0 энергия системы равна $\frac{kx_0^2}{2}$. В положении равновесия вся она переходит в кинетическую энергию стержня:

$$\frac{M(v_{\max}^{(1)})^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2} \Rightarrow v_{\max}^{(1)} = x_0 \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 M(L^2 + R^2)^{3/2}}}.$$

б) Цилиндр свободен. В положении максимального смещения энергия равна $\frac{kx_0^2}{2}$, полный импульс равен нулю. В положении равновесия кинетические энергии стержня и цилиндра (одинаковой массы M) равны, а их скорости противоположны по направлению и равны по модулю $v_{\max}^{(2)}$. Из закона сохранения энергии следует:

$$\frac{kx_0^2}{2} = Mv^2 \Rightarrow v_{\max}^{(2)} = x_0 \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 M(L^2 + R^2)^{3/2}}} = \frac{v_{\max}^{(1)}}{\sqrt{2}}.$$

3. а) Учитывая размерности мощности $[P] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$ и электрической постоянной $[\epsilon_0] = \text{Кл}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-3}$, приравниваем показатели степени при базовых единицах (кг, м, с, Кл). В итоге получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -\gamma = 1, \\ \beta - 3\gamma + \delta = 2, \\ -\beta + 2\gamma - 2\delta = -3, \\ \alpha + 2\gamma = 0. \end{cases}$$

Откуда: $\gamma = -1, \alpha = 2, \delta = 2, \beta = -3$, то есть

$$P = A \frac{e^2 a^2}{\epsilon_0 c^3}.$$

б) Электрон движется по круговой орбите радиуса R вокруг протона. Из второго закона Ньютона $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = m_e \frac{v^2}{R}$ выразим ускорение $a = \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^2}$. Полная энергия электрона:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Подставляя a^2 в формулу для мощности излучения, имеем:

$$P = \frac{A e^6}{16\pi^2 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 R^4}.$$

Из условия $\frac{dE}{dt} = -P$ и выражения для E получаем дифференциальное уравнение для $R(t)$:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{A e^4}{2\pi\epsilon_0^2 c^3 m_e^2 R^2}.$$

Интегрируя от R_0 до 0, находим время падения:

$$\tau = \frac{2\pi\epsilon_0^2 m_e^2 c^3 R_0^3}{3A e^4}.$$

в) При $A = \frac{1}{6\pi}$:

$$\tau = \frac{4\pi^2\epsilon_0^2 m_e^2 c^3 R_0^3}{e^4} \approx 1,56 \cdot 10^{-11} \text{ с.}$$

Полученное время примерно в 10^{-3} раз меньше характерного времени жизни возбуждённых атомов ($\sim 10^{-8}$ с). Это означает, что в рамках классической электродинамики атом не может быть стабильным — электрон должен упасть на ядро практически мгновенно. Следовательно, классическая модель не подходит для описания атома.