

Период и частота малых колебаний

Везде, где потребуется, следующие константы считаются известными: гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$, ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

1. Для вертикального пружинного маятника с массой груза m и жёсткостью пружины k выведите уравнение колебаний двумя способами: через второй закон Ньютона и через закон сохранения энергии. В качестве переменной используйте смещение груза от положения равновесия.

Затем найдите зависимости скорости и ускорения груза от времени. В начальный момент пружина не деформирована, а скорость груза равна нулю.

2. Для математического маятника длины L выведите уравнение колебаний двумя способами (через второй закон Ньютона и через закон сохранения энергии). В качестве описывающей движение переменной выберите сначала угол отклонения нити от вертикали φ , а затем — горизонтальную координату груза.

3. (*Маятник и постоянная сила*) Период малых колебаний математического маятника массой m равен T_0 . На шарик начинает действовать дополнительная постоянная сила F . Найдите период малых колебаний маятника вблизи положения равновесия, если эта сила направлена: а) вертикально; б) горизонтально (рассмотрите колебания в вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса и вектор силы F , и в плоскости, ей перпендикулярной).

4. (*Маятник в автомобиле*) Автомобиль движется с ускорением a вверх по склону, угол наклона которого к горизонту равен α . Внутри автомобиля находится математический маятник длиной L . Найдите период его малых колебаний.

5. Найдите частоту малых колебаний вблизи положения равновесия следующих систем.

а) Физического маятника (заданы его масса m , момент инерции I относительно оси подвеса и расстояние d от оси до центра масс).

б) Идеальной жидкости в U-образной трубке (задана общая длина столба жидкости L) в поле тяжести.

в) Гантели в форме соединённых пружиной жёсткостью k шариков с массами m_1 и m_2 в невесомости.

г) Груза массой m , закреплённого на середине тонкой невесомой горизонтальной струны длины L , сила натяжения которой равна F и велика по сравнению с силой тяжести груза.

6. (*Колебания во вращающейся трубе*) Внутри горизонтальной трубы радиусом R , вращающейся с большой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии,

находится небольшое тело. В положении равновесия оно (за счёт трения) располагается ниже оси трубы на расстоянии $0,8R$ по вертикали. Найдите период малых колебаний тела в плоскости, перпендикулярной оси трубы.

7. (Колебания подвешенной дуги) Однородный металлический прут массой m имеет форму дуги окружности радиусом R и постоянное поперечное сечение. Дуга симметрично подвешена на двух лёгких нитях длиной R каждая так, что угол между нитями равен 2φ . Найдите период малых колебаний системы в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью дуги.

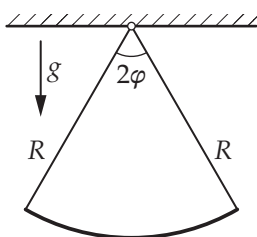


Рис. 1

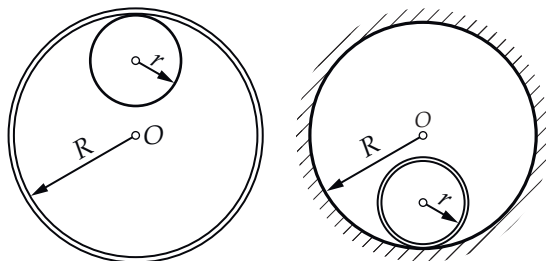


Рис. 2

8. (Обруч на бревне и в трубе) Найдите период малых колебаний тонкого однородного обруча, происходящих без проскальзывания, в следующих случаях: а) обруч радиусом R надет на неподвижное горизонтальное бревно радиусом r (см. рис. 2, слева); б) обруч радиусом r находится внутри неподвижной горизонтальной трубы радиусом R (рис. 2, справа).

9. (Крутильные колебания кольца) Однородное кольцо массой m и радиусом r горизонтально подвешено на трёх одинаковых вертикальных нитях длиной L , расположенных симметрично. Найдите частоту его малых крутильных колебаний относительно вертикальной оси.

10. (Потенциал Леннарда-Джонса) Взаимодействие двух атомов часто описывается потенциалом Леннарда-Джонса:

$$U(r) = \varepsilon \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right],$$

где r — расстояние между атомами, а ε и r_0 — характерные параметры взаимодействия. Найдите равновесное расстояние между двумя одинаковыми атомами массой m , образующими молекулу, и частоту их малых колебаний.

11. (Бусинка, скользящая по нити) Небольшая бусинка массой m надета на невесомую нить длиной L , концы которой закреплены на одинаковой высоте на расстоянии d друг от друга ($d < L$). Найдите частоту малых колебаний бусинки, считая, что при движении она без трения скользит по нити.

12. (Колебания поршня в цилиндре) В вертикальном цилиндре под поршнем массой m и площадью сечения S находится ν молей идеального газа. Молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме равна c_V . Поршень может без трения перемещаться вдоль оси цилиндра. Давление и температура окружающего воздуха равны P_0 и T_0 . Теплоёмкостью цилиндра и поршня можно пренебречь. Первоначально система находится в равновесии при температуре T_0 .

Считая процессы в газе квазистатическими, найдите циклическую частоту малых свободных колебаний поршня: при поддержании постоянной температуры газа (Ω_T); в условиях полной теплоизоляции цилиндра (Ω_S).

13. (В шаре с постоянной плотностью) а) В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд q , равный по модулю заряду электрона, равномерно распределён по объёму тяжёлого шара радиусом R . Найдите период колебаний электрона массой m , помещённого в такой шар.

б) Определите время полёта камня от одного полюса Земли до другого по прямому тоннелю, прорытому через центр Земли. Плотность Земли считайте постоянной, а её радиус равным $R = 6400$ км.

14. (Поправка на массу пружины) Груз массой M лежит на горизонтальном столе и прикреплен к стене пружиной жёсткостью k . Учтите массу пружины m , считая её малой по сравнению с массой груза ($m \ll M$). Покажите, что с учётом этой поправки частота колебаний системы равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}.$$

15. (Маятник на заряженной нити) Невесомая нерастяжимая нить одним концом прикреплена к потолку, а на другом её конце закреплён тяжёлый груз малых размеров. Период малых колебаний такого математического маятника равен T_0 . Систему помещают в однородное электростатическое поле, направленное вертикально вверх, и равномерно заряжают нить положительным зарядом такой величины, что натяжение нити у точки подвеса становится равным нулю. Чему станет равен период малых колебаний маятника T_1 , если изменить направление электростатического поля на противоположное?

Заряд по нити не перераспределяется, а взаимным отталкиванием элементов нити пренебрежимо мало по сравнению с их взаимодействием с внешним полем.

16. (Колебания гантели на полусфере) На горизонтальной полусфере радиусом R в положении равновесия лежит гантель, состоящая из невесомого стержня длиной $2L$ и двух одинаковых маленьких шариков массой m на его концах

(см. рис. 3). Найдите период малых колебаний гантели, считая, что стержень колеблется по полусфере без проскальзывания.

Как изменится период колебаний, если вместо гантели на полусферу положить тонкую однородную массивную планку той же длины $2L$?

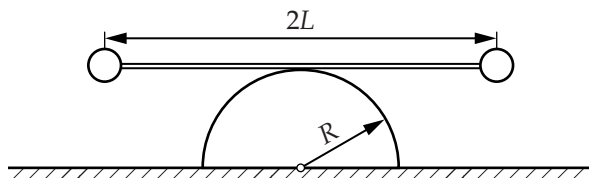


Рис. 3

17. Идеальная нить, пропущенная через небольшое отверстие в гладком горизонтальном столе, соединяет два маленьких груза массой m каждый. Первый груз находится на поверхности стола, а второй висит под столом и может двигаться по вертикали (нить всё время остаётся натянутой).

Второй груз находится в равновесии, когда первый равномерно вращается по окружности с угловой скоростью Ω_0 . Найдите радиус этой окружности r_0 и частоту малых радиальных колебаний системы вблизи состояния равновесия. Как изменится частота колебаний, если масса второго груза станет равна M ?

18. (Центробежный регулятор) Система, изображённая на рис. 4, представляет собой модель центробежного регулятора. Два тяжёлых груза с помощью лёгких стержней длиной a и шарниров соединены с вертикальным валом. Стержни могут свободно отклоняться в плоскости, проходящей через вал, которая вращается вокруг его оси с постоянной угловой скоростью Ω . В положении равновесия угол между стержнями равен 90° .

Определите период малых колебаний грузов вблизи положения равновесия. Трения в шарнирах и подшипниках вала нет, а размеры грузов пренебрежимо малы по сравнению с длиной стержней.

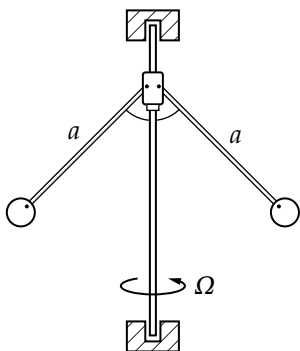


Рис. 4

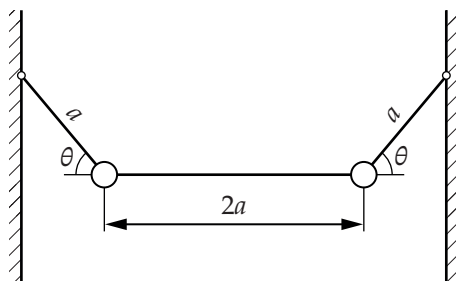


Рис. 5

19. (Поперечные колебания шариков) Два одинаковых маленьких шарика, соединённые невесомой нерастяжимой нитью длиной $2a$, подвешены между вертикальными стенками на двух таких же нитях длиной a (см. рис. 5). Угол θ между крайними нитями и горизонталью известен. Найдите частоты малых колебаний шариков в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка: а) частоту ω_1 синфазных колебаний, при которых связывающая шарiki нить движется поступательно, оставаясь параллельной плоскости рисунка; б) частоту ω_2 противофазных колебаний, при которых шарiki в любой момент времени смещены из плоскости рисунка на равные расстояния от неё в противоположные стороны.

Указания

- 9.** Поворот кольца сопровождается его подъёмом; можно выразить изменение потенциальной энергии.
- 10.** Эффективная жёсткость находится как вторая производная потенциала в минимуме. Колеблются оба атома.
- 11.** Бусинка движется по эллипсу, длины полуосей которого можно определить.
- 12.** Определите малое изменение давления газа при малом изменении объёма. Два режима отличаются множителем в уравнении процесса, записанном для малых изменений.
- 13.** Как зависит от расстояния до центра сила, действующая на тело внутри шара с однородными распределением массы или заряда?
- 14.** Малая масса позволяет считать деформацию пружины в любой момент такой же, как в статическом случае. Сравните кинетические энергии груза и пружины.
- 15.** Натяжение нити зависит от расстояния до точки подвеса, а вот его горизонтальная проекция — нет. Форма нити при колебаниях уже не прямая.
- 16.** На сколько поднимается центра масс гантели при повороте на малый угол? Гантель и планка отличаются только моментом инерции.
- 17.** Какая физическая величина сохраняется при радиальных колебаниях для верхнего груза? Учтите это в уравнении движения.
- 18.** Удобно перейти во вращающуюся систему отсчёта и работать с эффективной потенциальной энергией.
- 19.** Обе связи здесь геометрические. Ключевая величина — подъём шариков при смещении из плоскости рисунка, и в двух режимах он разный.