

Элементы СТО

1. Опишите схему эксперимента Майкельсона-Морли. О чём свидетельствовали результаты опытов Майкельсона? Как связаны постулаты специальной теории относительности и результаты опытов Майкельсона?

2. Рассмотрим два события, разность пространственных координат которых равна $d\vec{r}$, а разность временных равна dt в некоторой системе отсчёта. Пусть происходит преобразование этой системы отсчёта в другую: $d\vec{r} \rightarrow d\vec{r}'$, $dt \rightarrow dt'$, удовлетворяющее соотношению

$$dr^2 - c_0^2 (dt)^2 = (dr')^2 - c_0^2 (dt')^2,$$

где c_0 — постоянная с размерностью скорости. Покажите, что скорость света будет равна c в обеих системах отсчёта, если выполняется равенство $c_0 = c$.

Скалярное произведение 4-векторов

Пусть A^i и B^i ($i = 1, \dots, 4$) — компоненты 4-векторов A и B в четырёхмерном пространстве Минковского. Скалярное произведение 4-векторов в этом пространстве даётся формулой

$$(A \cdot B) = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3.$$

3. На ракете, летящей с достаточно большой скоростью относительно Земли, происходит вспышка света. С точки зрения наблюдателя на ракете область, занятая фотонами вспышки, ограничивается равномерно расширяющейся сферой. Какой представляется граница этой области наблюдателю на Земле?

4. Частица движется с постоянной скоростью $\vec{v}$ относительно лабораторной системы. В нулевой момент времени она находится в начале координат, а в момент времени t оказывается в точке с пространственными координатами $\vec{v}t$. Чему равен квадрат интервала между этими событиями в лабораторной системе и в системе частицы? Найдите разность временных координат t_0 этих событий в системе частицы (собственное время частицы).

Преобразование Лоренца

Пусть A^0 , A^1 и A^2 — первые три компоненты некоторого 4-вектора в K -системе, тогда соответствующие компоненты этого 4-вектора в движущейся K' -системе даются формулами:

$$A'^0 = \gamma (A^0 - \beta A^1), \quad A'^1 = \gamma (A^1 - \beta A^0), \quad A'^2 = A^2,$$

где $\beta = \frac{V}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, V — скорость системы K' относительно K совпадает по направлению с осью OX . Считается, что начала 4-мерных систем координат K и K' совпадают.

5. Как выглядят формулы преобразования Лоренца, по которым компоненты 4-вектора в K' -системе пересчитываются в его компоненты в K -системе?

6. Покажите, что квадрат любого 4-вектора (в пространстве Минковского) инвариантен относительно преобразований Лоренца (иначе говоря, не меняется при преобразованиях Лоренца).

7. Покажите, что скалярное произведение двух разных 4-векторов является релятивистским инвариантом, иначе говоря, не меняется при преобразованиях Лоренца.

8. Система K' движется относительно системы K со скоростью V . В момент, когда начала координат совпадают, находившиеся там часы каждой из систем показывали одно и то же время $t_0 = t'_0 = 0$. Какие координаты $x(t)$ и $x'(t')$ в каждой из систем имеет частица, движущаяся так, что часы систем K и K' , располагающиеся в точках с координатами x и x' показывают одно и то же время $t = t'$?

9. Стержень длиной l_0 , на концах которого установлены две маленькие лампочки, движется со скоростью V , направленной вдоль стержня, удаляясь от неподвижного в лабораторной системе наблюдателя. В некоторый момент лампочки одновременно (в системе стержня) вспыхивают. Сколько времени проходит по часам лабораторной системы между вспышками?

10. В условиях предыдущей задачи чему равна длина стержня в лабораторной системе? Иначе говоря, чему равна разность пространственных координат концов стержня в лабораторной системе в один момент времени по часам этой системы?

11. В условиях задачи 9 лампочки (в системе стержня) загораются не одновременно, а в разные моменты времени, так что свет вспышек достигает наблюдателя одновременно по часам лабораторной системы. Чему будет равна кажущаяся наблюдателю длина стержня?

12. Стержень, собственная длина которого равна l_0 , покоится в системе отсчёта K' ; он расположен так, что составляет с осью OX' угол φ' . Какой угол составляет этот стержень с осью OX в системе отсчёта K ? Считайте, что направления осей систем K и K' совпадают. Система K' движется относительно системы K со скоростью V , направленной вдоль оси OX .

13. Космическая частица, движущаяся со скоростью $v = c - \Delta v$ ($\Delta v = 5 \cdot 10^{-5} \cdot c$), распадается через время τ_0 (по часам системы, связанной с частицей) после попадания в атмосферу Земли. Какое расстояние проходит частица в атмосфере Земли?

14. На сколько должна отличаться от скорости света скорость образующихся на Солнце мюонов (время жизни $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ с), чтобы от Солнца до Земли успевало долететь, не распавшись, 95 % частиц? Свет идёт от Солнца до Земли 500 с. Время жизни τ_0 в данной задаче имеет смысл постоянной времени в законе радиоактивного распада $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}$.

4-вектор скорости

Компоненты 4-вектора скорости u даются формулами ($\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ — трёхмерная скорость):

$$u^0 = \gamma, \quad u^1 = \gamma \frac{v_x}{c}, \quad u^2 = \gamma \frac{v_y}{c}, \quad u^3 = \gamma \frac{v_z}{c},$$

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

15. Объясните, в чём состоит геометрический смысл 4-вектора скорости?

16. Применив преобразование Лоренца к 4-вектору $(cdt, d\vec{r})$, получите формулу

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}},$$

дающую релятивистский закон сложения скоростей.

17. Покажите, что формула из предыдущей задачи, может быть получена в результате применения преобразования Лоренца к 4-вектору скорости.

18. Космический корабль, на котором располагается источник электромагнитных волн частоты ν , движется со скоростью βc ($\beta < 1$ — известная постоянная) относительно лабораторной системы отчёта вдоль нормали к отражающей поверхности, неподвижной относительно лабораторной системы. Отражённые этой поверхностью волны попадают на приёмник, установленный на корабле. Определите частоту ν' излучения, регистрируемого приёмником.

19. Космический корабль, движущийся с постоянной скоростью βc ($\beta < 1$ — известная постоянная) относительно лабораторной системы отчёта, испускает короткие световые вспышки с периодом T (в системе корабля). С каким периодом T' регистрирует эти вспышки неподвижный относительно лабораторной системы фотоприёмник? Скорость корабля направлена по линии, соединяющей корабль и приёмник импульсов.

20. Две частицы одинаковой массы движутся со скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$) вдоль одной прямой в одном направлении. Определите скорость V системы центра масс частиц.

21. В условиях предыдущей задачи скорости частиц равны $0,6c$ и $0,8c$, определите скорости частиц в системе центра масс.

22. В опытах Физо в лабораторной системе отчёта определялась скорость v света в воде, движущейся со скоростью V . На основании результатов своих экспериментов Физо получил формулу

$$v = \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

где n — показатель преломления воды, все скорости направлены вдоль одной прямой. В каком приближении справедлива формула, найденная Физо?

4-вектор импульса

Компоненты 4-вектора импульса $p^i = m c u^i$ даются формулами:

$$p^0 = m c \gamma, \quad p^1 = \gamma m v_x, \quad p^2 = \gamma m v_y, \quad p^3 = \gamma m v_z,$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. При этом справедливы соотношения:

$$p^0 = \frac{E}{c}, \quad E = \gamma m c^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad (m c)^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2,$$

где E и $\vec{p}$ — энергия и релятивистский импульс частицы массой m .

23. Покажите, что интегрирование выражения

$$dT = \delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{v} \cdot d\vec{p},$$

в котором под $\vec{p}$ понимается релятивистский импульс частицы $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$, даёт формулу

$$T = m c^2 (\gamma - 1)$$

для релятивистской кинетической энергии.

24. Ультрарелятивистский протон с энергией E налетает на покоящийся протон ($E \gg m c^2$). Найдите энергию протона в системе центра масс. Определите скорость V системы центра масс.

25. Найдите кинетическую энергию π^0 -мезонов, распадающихся по схеме $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, если счётчик, расположенный по направлению движения мезонов, регистрирует γ -кванты с энергией $E_1 = 2E_0 = 270$ МэВ, где E_0 — энергия покоя π^0 -мезона.

26. π^0 -мезоны с энергией $E = 200 m c^2$ распадаются на лету на два γ -кванта. Определите угол 2β при вершине конуса, в который вылетает половина образующихся при распаде γ -квантов, если в системе покоя π^0 -мезона распад изотропен. Скорости π^0 -мезонов направлены вдоль оси конуса.

27. В условиях предыдущей задачи определите максимальную и минимальную энергию γ -квантов, распространяющихся в пределах рассматриваемого конуса.

28. Позитрон с энергией E сталкивается с покоящимся электроном. В результате аннигиляции образуются два γ -кванта, которые разлетаются симметрично относительно направления движения позитрона в лабораторной системе. Определите угол α разлёта γ -квантов. Масса электрона (и позитрона) равна m .

29. Рентгеновский квант упруго рассеивается на электроном (эффект Комптона). Выведите формулу

$$\Delta \lambda = \frac{h}{m c} (1 - \cos \theta),$$

дающую изменение длины волны кванта; θ — угол рассеяния, m — масса электрона.

30. Ультрарелятивистская частица с массой m и энергией E упруго рассеивается на неподвижном тяжёлом ядре с массой M ($M \gg m$). Как зависит энергия $E'(\theta)$ рассеянной частицы от угла рассеяния θ ?

31. При столкновении протонов высоких энергий могут образовываться протон-антипротонные пары в реакции $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$. Какую минимальную (пороговую) кинетическую энергию должен иметь протон, чтобы при столкновении с покоящимся протоном мишени такая реакция была бы возможна? Массы протона (p) и антипротона ($\bar{p}$) равны. Энергия покоя протона равна 938 МэВ.

32. Получите в одномерном случае формулу

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}},$$

описывающую релятивистский эффект Доплера, рассматривая электромагнитное излучение как поток фо-

тонов. Поясните выбор знаков в выражении под знаком корня.

33. Источник электромагнитных волн частотой ν движется со скоростью $v = \beta c$ относительно фотоприёмника, регистрирующего приходящие от источника волны под углом φ к направлению движения источника. Определите частоту принимаемого излучения (эффект Доплера).

Ответы и комментарии

1. Эксперименты Майкельсона доказывают отсутствие «эфирного ветра», из чего делается вывод о том, что скорость распространения электромагнитных взаимодействий в вакууме (иначе говоря, скорость света) не зависит от движения источника. Последнее утверждение является постулатом теории относительности в том виде, как его формулировал Эйнштейн.

$$4. S^2 = (c^2 - v^2)t^2; \tau_0 = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

$$5. A^0 = \gamma(A'^0 + \beta A'^1), A^1 = \gamma(A'^1 + \beta A'^0).$$

$$7. x(t) = \pm \frac{ct}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right), x'(t') = \mp \frac{ct'}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

$$8. t = \beta\gamma \frac{l_0}{c}.$$

$$9. l = \frac{l_0}{\gamma}.$$

$$10. l = l_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

$$11. \operatorname{tg} \varphi = \gamma \operatorname{tg} \varphi'.$$

$$12. l \approx c\tau_0 \sqrt{\frac{c}{2\Delta v}} = 10^3 \cdot c\tau_0.$$

$$13. \frac{\Delta v}{c} = 2 \cdot 10^{-20}.$$

14. Легко видеть, что $u^i = \frac{ds^i}{d\tau}$, где $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ — собственное время частицы, ds^i — i -ая компонента приращения интервала. При этом в пространстве Минковского $(u \cdot u) = 1$, поэтому вектор 4-скорости — это единичный вектор касательной к мировой линии частицы.

15. Используйте тот факт, что по определению $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$.

$$17. v' = v \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

$$18. T' = T \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

$$19. V = \frac{v_1 \sqrt{c^2 - v_2^2} + v_2 \sqrt{c^2 - v_1^2}}{\sqrt{c^2 - v_1^2} + \sqrt{c^2 - v_2^2}}.$$

$$20. v' = \frac{v_2 \sqrt{c^2 - v_1^2} - v_1 \sqrt{c^2 - v_2^2}}{\sqrt{c^2 - v_2^2} + \sqrt{c^2 - v_1^2}} = \frac{c}{5}.$$

21. Следует преобразовать скорость света, равную $\frac{c}{n}$ в системе воды, в систему наблюдателя и убедиться в том, что полученное выражение сводится к формуле Физо в приближении $\frac{v}{c} \ll 1$.

22. Можно показать, что справедливо равенство

$$m\vec{v} \cdot d(\gamma\vec{v}) = \frac{md(v^2)}{2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{mv^2 d(v^2)}{2c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Выражение в правой части после простых преобразований легко интегрируется.

$$23. E' = \sqrt{\frac{E \cdot mc^2}{2}}; V = c\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \text{ где } x = \frac{mc^2}{E}.$$

$$24. T = \frac{9E_0}{8} \approx 304 \text{ МэВ}.$$

$$25. 2\beta \approx \frac{2mc^2}{E} = 0,01 \text{ рад}.$$

$$26. E_{\max} \approx E, E_{\min} \approx \frac{E}{2}.$$

$$27. \alpha = \arccos\left(\frac{\gamma-3}{\gamma+1}\right), \text{ где } \gamma = \frac{E}{mc^2}.$$

$$29. E'(\theta) = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \theta)}.$$

$$30. T_{\min} = 6mc^2 \approx 5,6 \text{ ГэВ}.$$

31. Рассмотрите преобразование Лоренца 4-импульса фотона.

32. $v' = v \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 \mp \beta \cos \varphi}$. Знак «-» в знаменателе соответствует приближению источника излучения.

Комментарии к списку литературы

При составлении задания использовались задачки [1], [2], [3]. Теоретический материал вполне доступно излагается в главах 10, 11, 12 учебника [4], в главе 10 книги [5] (довольно коротко). Также можно рекомендовать книгу [6] (в главе 3 разбирается большое количество задач) и книгу Джексона [7] (главы 11, 12). Последняя книга очень хорошая, но может показаться сложной. Многие нетривиальные факты достаточно понятно объясняются в первых лекциях курса [8]. Пониманию СТО также может способствовать текст [9], построенный в виде ответов на часто возникающие вопросы.

Список литературы

1. Баканина Л. П., Козел С. М., Белонучкин В. Е. Физика. Задачник. 10–11 классы : пособие для учащихся образоват. учреждений : проф. уровень / под ред. С. М. Козела. — М. : Просвещение, 2011. — 270 с. — (Академический школьный учебник).
2. Стрелков С. П. [и др.]. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 кн. Кн. 1. Механика / под ред. И. А. Яковлева. — 5-е изд., стер. — М. : ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006. — 240 с.
3. Бельченко Ю. И., Гилёв Е. А., Силагадзе З. К. Механика частиц и тел в задачах. — М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. — 248 с.
4. Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. Берклевский курс физики. Т. 1. Механика : пер. с англ. / под ред. А. В. Шальникова, А. С. Ахматова. — 3-е изд., испр. — М. : Издательство «Наука»: Главн. ред. физ.-мат. лит., 1983. — 480 с.
5. Кингсеп А. С., Локшин Г. Р., Ольхов О. А. Основы физики. Курс общей физики: Учебн. В 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А. С. Кингсепа. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 506 с.
6. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Современная электродинамика, часть 1. Микроскопическая теория: Учебное пособие. — М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. — 736 с.
7. Джексон Д. Классическая электродинамика / под ред. Э. Л. Бурштейна ; пер. с англ. Г. В. Воскресенского, Л. С. Соловьёва. — Издательство «МИР», 1965. — 704 с.
8. Ахмедов Э. Т. Лекции по специальной теории относительности и классической электродинамике. [Электронный ресурс]. — URL: <https://mipt.ru/upload/medialibrary/37f/lecturesto.pdf> (дата обр. 20.04.2022).

9. Гаврилов С. Вопросы и ответы по специальной теории относительности. [Электронный ресурс]. — URL: [https :
/ / ru . scribd . com / document / 457306308](https://ru.scribd.com/document/457306308) (дата обр. 20.04.2022).